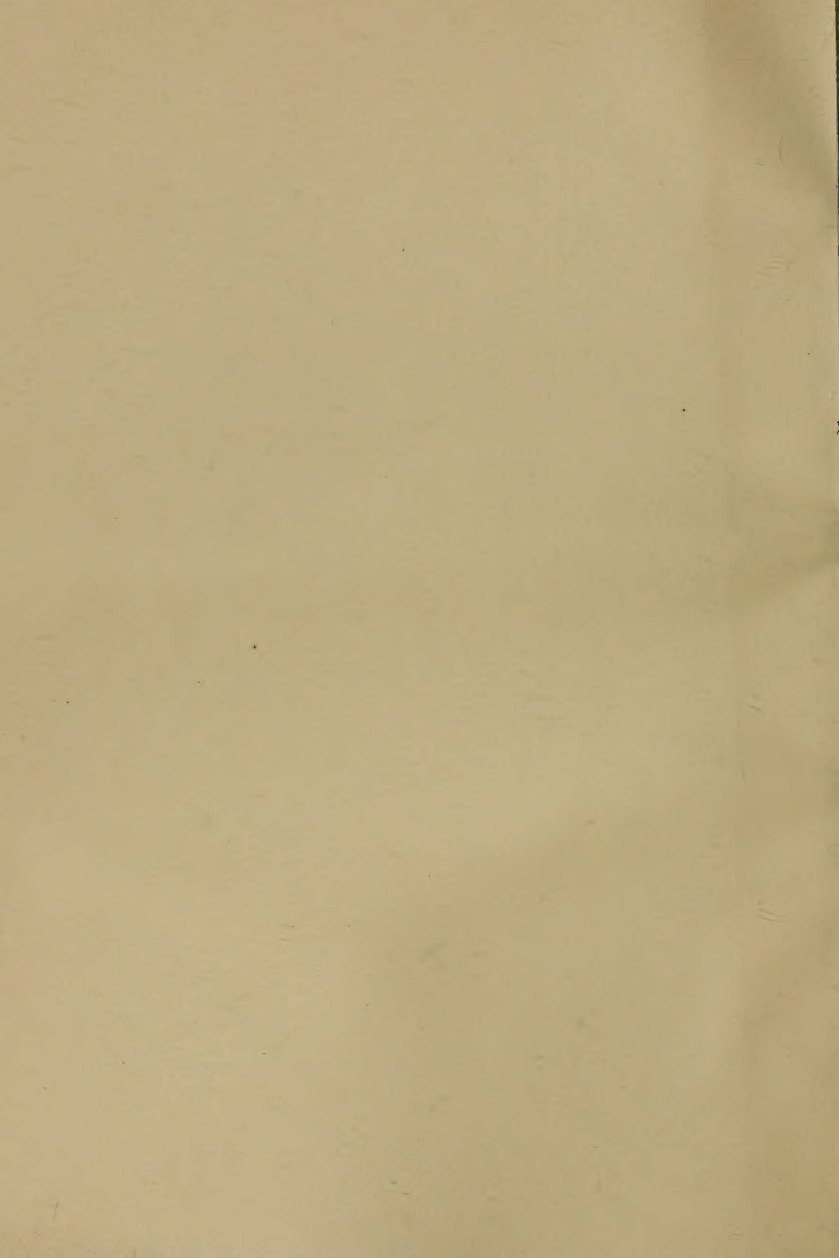










Abhandlungen

der

Churfürstlich-baierischen Akademie

der

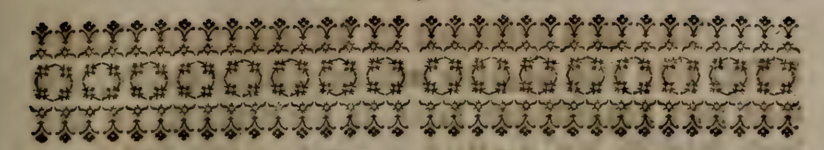
Wissenschaften

Fünfter Band,

welcher die philosophischen enthält.

München

zu finden in der churfürstlich-akademischen Buchhandlung 1768.



Vorrede.

Wir liefern unserm vorjährigen Versprechen zu folge den 5ten Band unserer akademischen Abhandlungen von jeder Classe besonders, so daß die Liebhaber einer oder der andern Materie den davon handelnden Theil in einem abgesonderten Bande haben können.

Der gegenwärtige enthält die philosophischen Abhandlungen, worunter die erste des Herrn Karsten von den Logarithmen negativer Größen um so merkwürdiger ist, als sie eine Frage betrift, über welche die größten Mathematikverständigen und Analysten der neuern Zeiten nicht haben einig werden können, nämlich ob dergleichen Logarithmen möglich seyn oder nicht. Unser Herr Autor hat sich alle Mühe gegeben, die Begriffe so deutlich auseinander zu setzen, und den eigentlichen Sinn der Streitfrage in ein so helles Licht zu stellen, als es ihm nur immer möglich gewesen.

Vor allem bestimmet Er die eigentliche Notion dessen, was man negative und unmögliche Größe, und was man Logarithmen heißt, so wie beyde Theile über diese Begriffe sich vergleichen, und zeiget, daß wenn man in der Analyse verschiedene Größen mit einander vergleichet, es nicht blos allein um die Größe der einen gegen der andern, sondern auch darum zu thun sey, ob eine der andern entgegen gesetzt sey oder nicht, eben so, wie es bey Vergleichung zweyer Linien, nicht nur um ihre Größe, sondern auch um ihre Lage gegeneinander zu thun ist, auf welche in der Algebra mit gesehen werden muß. Dadurch entsteht nun einige Einschränkung von der Gleichheit zweyer Verhältnisse, worauf bey dieser Streitfrage zu sehen ist, weil die Lehre von den Logarithmen von der Lehre der Verhältnisse abhängt.

Geübte Kenner der Analyse werden in dieser Abhandlung eine überaus scharfsinnige Beurtheilungskraft und denjenigen schöpferischen Geist entdecken, der allen großen Geometern in Erfindung unbekannter oder in deutlicher Entwickelung und richtiger Anwendung bekannter Wahrheiten eigen ist. Unser Herr Author tritt endlich der Leibnitzischen und Eulerischen Meynung bey, und beweist gegen Bernoulli und d' Alembert, daß die Logarithmen negativer Größen unmöglich sind; wenn man nämlich darunter die Logarithmen der Verhältnis-

se negativer Zahlen zur positiven Einheit versteht, hingegen giebt er die Möglichkeit der negativen Logarithmen zu, wenn sie die Verhältnisse negativer Größen zur negativen Einheit ausdrücken; da aber die Einheit in algebraischen Rechnungen niemal anderst als Poßitiv angenommen werden kann, so sind die Logarithmen negativer Größen eben so unmöglich als die negative Einheit selbst. In der zweyten Abtheilung wendet der Herr Verfasser die in der ersten festgesetzte Theorie auf die Geometrie an, und widerleget alle diejenigen Gründe, welche die Herren Bernoulli und Euler aus diesem Fache zum Behuf der Logarithmen negativer Größen angeführet haben. Der angenehme und kernichte Vortrag, der in dieser Abhandlung herrschet, benimmt dem der Sache verständigen Leser allen Eckel, den eine an sich selbst so abstruse Materie sonst verursachen könnte.

Im zweyten Stück von den Projectionen der Kugel, welche eben den Herrn Karsten zum Verfasser hat, herrschet eben sowohl der starke analytische Formelgeist unserer heutigen großen Mathematiker, womit sie gleichsam Wunder thun. Der Herr Autor hat die Theorie von den Projectionen der Kugel, welche bisher noch in etwas unvollständig gewesen, sehr erweitert, und besonders mittelst leichter und vortheilhafter Regeln und ana-

ly-

lytischer Formeln ungemein brauchbar gemacht, so daß sie bey Projectionen der Sonnenfinsternisse gute Dienste leisten kann.

Das dritte Stück hat uns Herr Euler geliefert, welches verschiedene merkwürdige Auflösungen geometrischer Aufgaben enthält. Es betrift die Abtheilung einer jeden geradelinichten sowohl als Zirkel- und parabolischen Fläche in soviel gleiche Theile, als man verlanget, durch parallellinien, welche nach einer gegebenen Richtung lauten: Diese Abhandlung ist also practisch, und kann im Feldmessen mit vielen Nuzen angewendet werden. Denn da man bisher die Theilung solcher Flächen nur beyläufig treffen können; so giebt die eulerische Methode an Hand, wie sie sich auf das genaueste auf einmal berechnen lassen; besonders sind die allgemeinen Formeln zu Theilung der Zirkel- und Parallelflächen merkwürdig.

Im vierten Stücke macht wohlbesagter Herr Euler einen Versuch, die Figur der Erde durch die Beobachtungen der Mondshöhen zu bestimmen; und wiewohl dieses durch die pariser Akademie schon so genau geschehen, als es nur immer möglich ist, so hat doch unser Herr Autor auf eine scharfsinnige Art gezeiget, wie sothane Beobachtungen angewendet werden müssen,

um

um einerseits daraus die Figur der Erde heraus zu bringen, und anderseits zu prüfen, wie weit man sich auf die Bestimmung solcher Figur verlassen könne. Er löset demnach zwo Aufgaben mit vieler Scharfsinnigkeit und der ihm eigenen analytischen Stärke auf. In der Ersten wird die Figur des Mittagkreises für bekannt angenommen und bestimmt, unter welcher Höhe der Mond an einem jeden gegebenen Orte dieses Meridians zur Zeit seines Durchganges erscheinen muß, in der letztern wird aus den beobachteten Mondshöhen an verschiedenen Orten unter dem nämlichen Mittagskreise die Figur der Erde bestimmt. Herr Euler bekennt aber doch am Ende, daß diese Art, die Figur der Erde zu bestimmen, derjenigen weit nachzusetzen sey, deren sich die pariser Akademie bedienet habe, weil die Entfernung des Mondes von der Axe der Erde sehr groß ist.

Im fünften Stück liefert mehr belobter Herr Euler die Beschreibung von einer magnetischen Sonnenuhr, die zwar in Ansehung ihres Gebrauchs ziemlich eingeschränket ist, indem sie nur an dem Orte gebraucht werden kann, auf dessen Polhöhe sie gerichtet ist; die Umstände aber, die bey Verfertigung dieser Sonnenuhr in Acht genommen werden müssen, haben dem Herrn Verfasser Anlaß gegeben, verschiedene Anmerkungen darüber zu machen, und verschiedene analytische Formeln dabey anzubringen.

Das

Das sechste Stück ist von Hrn. Scheidt, der die akademischen Abhandlungen bereits mit verschiedenen schönen andern bereichert hat. Es handelt von Scheidung und Aufbereitung geringhaltiger Aerze bey Bergwerken, wo der Herr Verfasser die Ursachen anführet, warum die bisherigen Poch- und Waschwerke den Nutzen nicht geschaffet haben, den man von ihnen erwartet hatte. Er beschreibt darauf die Maschinen, die man bisher bey den Pochgräben und Gerinnen gebrauchet, und zeiget aus mechanischen Gründen, daß sie zur vortheilhaften Absönderung der schwerern und leichtern Aerzestuffen nicht sonderlich taugen. Er giebt zugleich eine andere Anlage, davon er selbst die gehofte gute Wirkung erfahren zu haben versichert.

Das siebente Stück ist des Herrn Rüdigers Abhandlung von den ersten Anfangsgründen der Körper, die sich auf ein ganz anders System gründet, als ehemals die Araber, Theophrastus Paracelsus und in neuern Zeiten Becher gehalten haben.

Das achte Stück enthält des Hrn. v. Osterwald Vorschlag einer neuen Kalenderform, und Einschaltungsart; wornach die wesentlichen Stücke des christl. Kalenders, nämlich die Qualität eines jeden Jahrs, die Sonntagsbuchstaben, das Frühlings-Æquinoctium, und der österliche mittlere Vollmond auf eine überaus leichte

Art, ohne allen astronomischen Calcul, bestimmet werden können. Diese Methode ist daher nicht nur der gregorianischen, sondern auch der protestantischen sogenannten verbesserten, weit vorzuziehen. Durch die vorgeschlagene Einschaltungsart wird das mittlere Frühlings-Æquinoctium beständig am 20ten März erhalten, die Zirkel gehen ewig fort, so daß man weder Cyclos solis, noch verschiedene Ordnungen derselben nöthig hat. Das wahre Osterfest kann auf diese Weise niemal verfehlet werden, weil man das Frühlings Æquinoctium sowohl als den nächst darauf folgenden österlichen mittlern Vollmond auf den Meridian zu Rom, der nicht um eine ganze Minute von dem zu Uranienburg differiret, nicht etwann nur auf Tage, sondern auf Stunden und Minuten weit leichter bestimmen kann, als man die bloßen Tage nach den gregorianischen Epacten findet. Und was das beste dabey ist; so läßt sich diese Kalenderforme fast alle Jahre, ohne das geringste Aufsehen oder Trouble in den Commercien zu erwecken, einführen. Die Größe des Jahrs wird, wie in der gregorianischen und julianischen zu 365 Tagen in einem gemeinen, und zu 366 Tagen in einem Schaltjahre angenommen; und in diesem ist der 24te Februarii der Schalttag, folglich dieser Monath 29 Tage lang. Der Unterschied des corrigirten Kalenders von dem julianischen besteht nur darinnen, daß, da man im juliani-

schen allemal im vierten Jahr beständig fort einschaltet, so geschieht dieses in dem corrigirten Kalendersystem nur siebenmal nacheinander, und das achtemal erst im 5ten Jahre. Dieß macht einen Zirkel von 33 Jahren, in deren Verlauf 8 Tage eingeschaltet werden. In 4 solchen Zirkeln, die 132 Jahre ausmachen, werden demnach 32 Tage eingeschaltet, da man nach der julianischen Jahrsforme 33 einschaltet. Man bringt also die nach dem julianischen System zu viel eingeschalteten Stunden nach dem unsrigen eben sowohl herein, als nach dem gregorianischen; aber mit weit mehreren Vortheile und Bequemlichkeit: weil die Unterlassung der überflüßigen Schalttage nur nach und nach und gleichsam unvermerkt geschieht, folglich die Æquinoctia und Solstitia an den nämlichen Tagen erhalten werden, welches nach der gregorianischen Intercalation nicht angeht.

Im ersten Abschnitte handelt der Herr Verfasser von bloßen einfachen Zirkeln zu 33 Jahren; im zweyten hingegen schlägt er combinirte Zirkel vor, wo man drey Einfache zu 33 Jahren, und einen zu 29 Jahren miteinander verbindet, und einen großen Zirkel von 128 Jahren daraus machet, nach deren Verfluß die mittlern Æquinoctia zu den nämlichen Stunden, Minuten und Secunden des Tags restituiret werden; wenn man näm=

nämlich die Größe des astronomischen Sonnenjahrs nach den richtigsten Observationen zu 365 Tagen, 5 Stund. 48 Min. und 45 Secunden annimmt.

Zugleich lehret der Herr Autor, wie man die Tage des corrigirten Kalenders mit einer wunderbaren Facilität, und Geschwindigkeit ohne einige Data aus der Chronologie dazu nöthig zu haben, auf die Gregorianischen und Julianischen reduciren kann.

Eine der schönsten Erfindungen unsers Jahrhunderts stellet sich im 9ten Stücke vor Augen; das sind die Glasmikrometer unsers Mitgliedes, des berühmten Mechanici zu Augsburg, Herrn Georg Friedrich Branders. Die Beschreibung dieser Mikrometer ist zwar von dem Hrn. Erfinder in einer besondern Schrift herausgekommen: weil aber derselbe diese Erfindung unserer Akademie zuerst bekannt gemacht, und die Maschine, womit die so bewundernswürdige Theilung vermittelst der Diamant-Risse auf den Gläsern verrichtet wird, eingesendet hat; so haben wir alles Recht zu haben geglaubet, dieselbe den Abhandlungen der Akademie einverleiben zu lassen.

Das Aug ergötzet sich, wenn man diese subtilen Eintheilungen auf dem Glase, die man mit bloßem Au-

ge kaum bemerken kann, durch ein Vergrößerungsglas betrachtet. So sehr dasselbe auch vergrößert; so wird man doch in den Zwischenräumen der Theilungen nicht die allergeringste Ungleichheit merken können. Wer nur ein wenig im Schätzen des Augenmaaßes geübet ist, der kann mit diesen Mikrometern kleine Winkel bis auf 2. bis 3 Secunden messen; eine Præcision, welche man bisher niemal vermuthet hätte.

Weyland Herr Professor Mayer zu Göttingen hat auch eine Art von dergleichen Mikrometern erfunden, und sich derselben bey seinen astronomischen Beobachtungen mit großem Vortheile bedienet. Sie sind aber gegen die Branderischen fast für nichts zu rechnen. Herr Mayer zeichnete die Linien auf seinen Glasmikrometern mit schwarzem Tusche, welcher durch die geringste Unachtsamkeit weggewischet werden konnte. Es war auch nicht möglich, die Theilungen vollkommen gleich zu machen; weil sie von freyer Hand nach dem Augenmaaße gemacht wurden: deswegen mußte sich auch Herr Mayer eigene Tabellen dazu machen: die Linien konnten auch nicht zarte genug gezogen werden. Auf den branderischen Mikromern hingegen werden sie mit dem feinsten Diamantport gezogen; folglich bleiben sie ewig, die Theilungen sind so vollkommen gleich, als sie es in der Natur seyn können, und

als sie das beste Aug mit den schärfesten Vergröße- rungsgläsern immer discerniren kann: und die Striche sind so zart, daß sie kaum den zweyhundertsten Theil einer Pariser Decimallinie bedecken.

Was diese Glasmikrometer für ungemeine und herrliche Dienste in der Astronomie leisten, ist den Sternkündigen zu Genüge bekannt; und der belobte Herr Professor Mayer, einer der größten Astronomen unsers Jahrhunderts, hat die Vortheile davon in ihrem ganzen Umfange eingesehen. Was dieser große Mann gewünschet, aber sich nicht zu hoffen getrauet hat, daß sich nämlich jemand finden möchte, der die Theilungen auf dem Glase mit genugsam zarten Diamantstrichen, ohne auf den Seiten auszuspritzen, und in einer vollkommenen Gleichheit, zuwege bringen könnte, das ist nun durch unsern Herrn Brander glücklich erreichet worden, und sein Name verdienet eben deswegen in den astronomischen Jahrbüchern verewiget zu werden.

Nicht allein aber in der Astronomie sondern auch in der Erdmesserey können diese Mikrometer wichtige Dienste thun. Man kann damit den Plan eines Feldes, wenn es nicht gar zu groß ist, und nicht über 2000 Schuhe im Durchmesser hat, aus einer einzigen

Station, ohne einige Meßkette zu gebrauchen, sehr genau und zuverläßig aufnehmen: weil man aus der gegebenen Größe eines Objects seine Distanz, und aus der gegebenen Distanz die Größe des Objects, in nicht gar zu weiten Entfernungen beynahe eben so genau ermessen kann, als wenn man sich einer Meßkette bediente.

Herr Brander ist nicht bey den bloßen Glasmikrometern, die man in Fernröhre und Telescopien setzet, stehen geblieben; sondern er hat versuchet, ganze Scalen auf Glase, zu 30 und mehr Zollen lang, auf eben die Art zu verfertigen. Und da hat sich gezeiget, was für eine unglaubliche Genauigkeit und Justesse seine Eintheilungsmethode mit der Maschine zu erreichen fähig ist. Denn, wenn man zwey auf gleiche Art getheilte Glasscalen aufeinander leget, so passen die Theilungsstriche durchaus vollkommen aufeinander, man mag sie umkehren und verschieben, wie man immer will.

Dieß hat unsern Künstler auf die Erfindung eines Sectors geleitet, welcher im 10ten Stücke beschrieben wird, und womit man in der Astronomie sowohl als Geometrie auf eine sehr leichte und bequeme Art: weil das Instrument nur von Holze gemacht ist,

und

und sich allenthalben ohne die mindeste Unbequemlichkeit hin transportiren läßt, Winkel bis auf 4 und 5 Secunden nahe zuverläßig bestimmen kann, so man bisher von den größten astronomischen Sextanten vergebens erwartet hat.

Den Beschluß machet im 11ten und letzten Stück die Beschreibung einer neuen Nivellierwage, welche ebenfalls von unserm Herrn Brander erfunden worden, und alle bisherigen gar weit übertrift; indem die damit gefundenen Horizontallinien von den wahren kaum um 2 Secunden im Winkel abweichen. Sie hat dabey die unvergleichlichen zween Vortheile, daß man sie 1) ganz geschwinde allenthalben, auch in einem Zimmer, ehe man die Operation damit auf dem Felde vornimmt, rectificiren kann; und 2) daß die Bewegung der Luft nicht die geringste Alteration dabey verursachet, so daß sie ganz geschwinde mit Zuverläßigkeit gestellet und in dieser Stellung immerzu erhalten wird, das Wetter mag beschaffen seyn wie es nur immer will. Wenn man eine solche Nivellierwage bey dem im 1ten Tome der akademischen philosophischen Abhandlungen S. 113. u. f. beschriebenen, und seit dem gar sehr verbesserten, ja beynahe von Hrn. Brander bis zur äußersten Vollkommenheit gebrachten Meßinstrument anstatt eines Bleysenkels anbringen

wollte;

wollte; so würde man in astronomischen Beobachtungen eben die Präcision erreichen, welche uns bisher die größten Quadranten und Sextanten kaum gewähret haben; und dieser Vortheil würde desto größer seyn, weil man besagtes Instrument mit einer einzigen Hand hin und her tragen, und bey einem jeden Fenster in unverrückter Stellung gebrauchen kann.

Lauter Erfindungen, welche unserm Jahrhundert, noch mehr aber der churbaierischen Akademie der Wissenschaften, und am allermeisten ihren Autoren Ruhm und Ehre bringen.



Wences=

Wenceslaus Johann Gustav Karsten,

der Weltweisheit Doctors und der Mathematik Professors zu Bützow,

Abhandlung

von den

Logarithmen verneinter Größen.

Erste Abtheilung.



§. 1.

Wenn Männer, wie Leibnitz und Bernoulli, wie Euler und d'Alenbert, über eine Lehre uneinig sind, und noch darzu über eine Lehre, worauf die erhabensten menschlichen Entdeckungen sich gründen: ja was noch mehr ist, über eine Lehre derjenigen Wissenschaft, worinn man seit Jahrtausenden den höchsten Grad der Evidenz zu finden geglaubt hat; so kann es der gelehrten Welt nicht gleichgültig seyn, wenn eine solche Uneinigkeit das Schicksal der mehresten gelehrten Streitigkeiten hat, wobey Jeder bey seiner Meynung bleibt, und nichts ausgemacht wird. Wäre die Frage: **Ob die Logarithmen verneinter Größen möglich oder unmöglich sind?** eine bloße speculativische Subtilität, welche in das Practische der Mathematik und der Naturlehre keinen Einfluß hätte, so würde es ziemlich gleichgültig seyn, ob man das eine oder das andere behauptete. Allein von der Beantwortung dieser Frage hängt in der Ausübung der Mathematik sehr vieles ab. So wenig es den Analisten gleichgültig seyn kann, ob man die Wurzeln gerader Exponenten aus verneinten Größen für möglich oder unmöglich hält, eben so wenig kann es ihm gleichgültig seyn, zu welcher Classe man die Logarithmen verneinter Größen rechnet.

§. 2.

Es hat seit einiger Zeit das Ansehen gehabt, als wenn der Streit über die Beschaffenheit der Logarithmen verneinter Größen durch Herrn Eulers Aufsatz: De la controverse entre Mrs. Leibnitz & Bernoulli sur les Logarithmes des nombres negatifs & imaginaires, im V Tome der Histoire de l'Academie de Berlin, völlig sey beygeleget worden. Allein Herr d'Alenbert tritt in seinen im Jahr 1761. zu Paris gedruckten Opuscules Mathematiques auf des Herrn Bernoulli Seite, und sucht Herrn Eulers obangeführten Aufsatz zu widerlegen. Ich habe mir Mühe gegeben, ausfindig zu machen, worauf es bey dieser Streitigkeit ankomme, und ich mache mir die Hoffnung, daß diejenigen Gedanken, welche ich von dieser Sache in gegenwärtiger Abhandlung vorgetragen habe, vieles dazu werden beytragen können, die Streitigkeit beyzulegen.

§. 3.

Man muß sich ohne Zweifel über die Hauptbegriffe des streitigen Satzes vor allen Dingen vergleichen; beyde streitende Theile müssen einerley Sache im Sinne haben, wenn sie die Wörter: **Logarithmus** und **verneinte Größe** gebrauchen, widrigenfalls ist keine Einigkeit zu hoffen. Was ist aber eine verneinte Größe? was ist ein Logarithmus? Ich glaube schwerlich, daß der Streit entschieden werden könne, wofern man bey Beantwortung dieser Fragen nicht bis auf die ersten Anfangsgründe zurück geht. Es kömmt mir wenigstens so vor, als wenn man die Streitfrage in immer mehr Dunkelheit einhüllet, wenn man die Gründe sowohl für die eine, als für die andere Meynung aus der Integralrechnung und höhern Geometrie hernimmt. Herrn Eulers angeführte Abhandlung über diese Sache ist unvergleich-

lich;

lich: dieß darf ich wohl nicht sagen, da dieser große Mann nichts als vortrefliche Stücke liefert. Allein ich glaube Herr d'Alenbert wäre leichter überzeugt worden, wenn Herr Euler den Begriff der Logarithmen einzig und allein aus den Anfangsgründen genommen hätte. Denn gegen dem Begriff, worauf Herrn Eulers Abhandlung gebauet ist, konnte Herr d'Alenbert auf der 197 Seite, seiner vorhin angeführten Schrift, dieses erinnern, es werde dabey das schon voraus gesetzt, worüber doch erstlich gestritten wird, daß nämlich alle Logarithmen zu positiven Zahlen gehören, weil $(1+w)^n$ nichts anders, als eine positive Zahl bedeuten kann, wenn w unendlich klein, und n unendlich groß ist. Auch Herrn d'Alenberts Abhandlung ist voll der tiefsinnigsten Untersuchungen. Vieleicht kann man sagen, sie habe noch diesen Vorzug vor der Eulerschen voraus, daß sie bis auf die ersten Begriffe zurück gehet. Allein, so wie diese vom Herrn d'Alenbert vorgetragen sind, können sie schwerlich gebraucht werden, die streitige Sache in ihr völliges Licht zu setzen. On appelle Logarithmes une ſuite de nombres en progreſſion Arithmetique *quelconque*, repondans a une ſuite de nombres en progreſſion Geometrique *quelconque*. Dieß ist Herrn d'Alenberts Erklärung der Logarithmen. Freylich liest man eben diese Erklärung in vielen Lehrbüchern. Ich sehe aber nicht ab, daß diese Erklärung besser sey, als wenn man sagen wollte, eine negative Größe sey eine solche, die das Zeichen — vor sich hat. Es ist daher nicht zu bewundern, wenn Hr. d'Alenbert auf der 199 Seite folgendes behauptet: il n'y a aucune liaiſon neceſſaire entre une ſuite de nombres, & la ſuite des Logarithmes, qui leur repondent. Aber stellet nicht jede Hyperbel unzählige Logarithmensysteme dar? und ist zwischen den hyperbolischen Trapezien und ihren zugehörigen Absciſſen keine nothwendige Verbindung? Das Willkührliche bey den Logarithmen bestehet überhaupt darinn, daß es gleichgültig ist, wie groß die Zahl

seyn soll, deren Logarithmum man = 1 setzet, oder sonst als gegeben annimmt. Eben so viel Willkührliches hat auch das System der trigonometrischen Linien: es ist nämlich gleich viel, wie groß der Bogen seyn soll, dessen sinus = 1 gesetzt wird. Aber ist dann deswegen keine nothwendige Verbindung zwischen den Zirkelbogen und ihren respondierenden trigonometrischen Linien?

§. 4.

Es ist eben so nothwendig, sich darüber zu vergleichen, was man durch das Wort **negative Größe** verstehen wolle, als es nöthig ist vest zu setzen, was ein Logarithmus sey, wenn man die Streitfrage gehörig beurtheilen will. Herr d'Alenbert scheinet hierauf Bedacht genommen zu haben, und streuet daher in seinem Vortrag einige Gedanken von der Beschaffenheit der negativen Größen ein. Er verwirft mit Recht auf der 201 und 204 Seite die Vorstellung der negativeu Größen, als solcher, die **kleiner als nichts** sind, ob man gleich diese Redensart, als eine Verkürzung des Ausdrucks, so wie manche andere für sich allein widersinnig lautende Redensarten, in der Analysi dulden kann. Indessen finde ich nicht, daß Herr d'Alenbert selbst von den negativen Größen genauer und bestimmter rede. Bald sind seine Ausdrücke ganz richtig und der Sache gemäß, z. E. auf der 202 Seite: C'est que le signe, que porte l'expression algebrique de cette ordonnée, n'indique que sa *position*, und auf der 203 Seite: En un mot toute quantité par elle meme a le signe +, elle ne porte le signe — que *relativement aux autres* exprimés ou sousentendus. Bald aber redet dieser große Geometer wie Des Cartes und **Wolf**, z. E. auf der 203 Seite le signe — n'indique qu une *fausse* position, und auf der 205 Seite in der Anmerkung: l'equation $by = (a-x)^2$ quand $x > a$, est proprement une *fausse* equation, la veritable est $by = (x-a)^2$ Dieser einzige Satz, den Herr d'Alen-

bert

bert hier behauptet, würde hinlänglich seyn, seyn ganzes System zu widerlegen, wenn ich ihn als einen richtigen Satz gelten lassen konnte. Auf die Art ist ja auch die Gleichung $(-1)^2 = (+1)^2$ eine falsche Gleichung, und die wahre Gleichung diese: $(+1)^2 = (+1)^2$ Aber Herr d'Alenbert nimmt jene mit dem Hrn. Bernoulli als wahr an, und schließt daraus die Folge: $2l - 1 = 2l + 1$, und hieraus weiter, es sey $l - 1 = l + 1$. Ich weis nicht, wie Hr. d'Alenbert diesem Beweise auf der 185 Seite eine so große Strenge zuschreiben kann, da er selbst den Hauptsatz, woraus alles übrige folgt, für falsch erklärt. Jedoch ich kann mich auf die Prüfung der beyderseitigen Gründe noch nicht einlassen, ich muß zuforderst die ganze Lehre so vortragen, wie ich sie einsehe, und wie ich glaube, daß sie auseinander gesetzt werden muß, wenn alle Dunkelheit und Verwirrung vermieden werden soll.

Begriffe der negativen und unmöglichen Größen.

§. 5.

Es giebt Begriffe, die einander so entgegen gesetzt sind, daß man von der Setzung des einen auf die Verneinung des andern, und umgekehrt, schließen kann; und dieses entweder schlechthin, oder in Beziehung auf einen gewissen Hauptbegriff, unter der Bedingung, daß von diesem Hauptbegriff die Rede sey. Unter der Bedingung, z. E. daß der Stand des Quecksilbers im Thermometer sich geändert habe, ist es entweder gestiegen oder gefallen. Und zum Voraus gesetzt, daß die höchste Fläche des Quecksilbers, auf einer nach reaumürscher Art eingetheilten Scale, nicht auf 0 stehe, muß sie entweder über 0 oder unter 0 stehen. Wenn man nun von zweyen solchen unter einem gemeinschaftlichen Hauptbegriff einander entgegen gesetzten Begriffen den einen anzeigen soll;

soll; so kann dieß auf eine gedoppelte Art geschehen. Man kann ihn einmal durch die Worte anzeigen, welche diesen Begriff gewöhnlicher massen bezeichnen: man kann ihn auch durch die Verneinung des ihm entgegen gesetzten ausdeuten. Es ist gleich viel, ob ich sage, das Queckfilber im Termometer sey von der 0 an gerechnet 3 Grade **herunter** gegangen, oder ob ich mich so ausdrücke: es sey von der 0 an gerechnet 3 Grade weggegangen, aber nicht **aufwärts**. Die **Verneinung** steckt hier nur im Ausdruck, und es wird in der That durch die Verneinung der einen Sache die ihr entgegen gesetzte **gesetzt**. Wendet man diese allgemeinen Betrachtungen auf das, was Größe heißt, gehörig an, so hat man den Begriff einer **negativen Größe**.

§. 6.

Es giebt Größen, die unter einem gemeinschaftlichen Begriff stehen, dabey aber einander so entgegen gesetzt sind, daß durch die Verneinung der einen die andere gesetzt wird, und umgekehrt. Diejenige von zweyen einander entgegen gesetzten Größen, welche man durch Verneinung der ihr entgegen gesetzten anzeiget, heißt eine **negative Größe**. Man sollte richtiger sagen: eine **negativ ausgedruckte Größe**. Die ihr entgegen gesetzte, wird sodann ohne Verneinung ausgedruckt, und man nennt sie eine **positive Größe**, da man sie eigentlich richtiger eine **positiv ausgedruckte Größe** nennen müßte. Das Negative steckt hier also keinesweges in der Größe, sondern blos in dem Ausdruck, der die Größe bezeichnet. Hat man von A nach B (1 Fig.) eine gerade Linie vorwärts gezogen, so kann man eben diese Linie auch rückwärts von A nach C verlängern. Soll man nun auf dieser Linie von A an gerechnet ein Stück, das z. E. drey Füß lang ist, abschneiden, so kann dieß auf eine doppelte Art geschehen, sowohl vorwärts als rückwärts. Gesetzt man verlanget, es sollen von A an

ge=

gerechnet rückwärts drey Fuß abgeschnitten werden, so kann man dieß auch so ausdrücken: Schneide von A an gerechnet 3 Fuß ab, aber **nicht vorwärts**. Es werden diese nicht vorwärts abgeschnittene 3 Fuß das Stück AE ausmachen, und das heißt in algebraischer Sprache: es sey AE = — 3 Fuß. Nun ist zwar AD eben soviel als AE, in Absicht auf die Größe, aber nicht in Absicht der Lage; denn es ist AD der Linie AE der Lage nach entgegen gesetzt. Wird also AE verneinent ausgedrückt, so muß man AD ohne Verneinung oder positiv ausdrücken, und das heißt in algebraischer Sprache, es sey AD = + 3 Fuß. Ich darf bey diesen Erklärungen ja den Einwurf wohl nicht fürchten, als hätte ich den algebraischen Sprachgebrauch verlassen. Die Herren **Hausen**, **von Segner**, und **Kästner** tragen in ihren Lehrbüchern, und der Herr Collegienrath **Aepinus** zu Petersburg in einer zu Rostock im Jahr 1754. herausgegebenen Schrift de notione quantitatis negativæ diese Begriffe eben so vor. Deswegen hoffe ich, berechtiget zu seyn, diese Erklärung von der negativen Größe als ungezweifelt richtig zum Grunde zu legen.

§. 7.

Die ganze mathematische Erfindungskunst beschäftiget sich damit, Regeln zu geben, wie man aus einigen bekannten Größen, und deren bekannten Verhältnissen untereinander, und gegen gewisse unbekannte Größen, die letztern finden könne. Man kann aber bekannter massen alle Größen, wenn blos von ihrem Verhältnisse die Rede ist, sowohl durch Zahlen als durch Linien ausdrücken, und die algebraischen Zeichen sind so allgemein, daß jede algebraische Formul so gut gewisse geometrische Constructionen, als arithmetische Operationen anzeiget, nachdem die Buchstaben entweder Linien oder Zahlen bedeuten. Deswegen lassen sich zwo entgegen gesetzte Größen allemal durch zwo gerade Linien vorstel-

len, die nach entgegen gesetzten Richtungen liegen, und sobald eine mathematische Aufgabe in eine Gleichung gebracht ist, sobald läßt sie sich als eine geometrische Aufgabe ansehen, wobey es darauf ankommt, aus gegebenen Linien eine oder mehrere unbekannte Linien zu finden. Hiebey ist nun folgender Umstand allemal vorzüglich in Betrachtung zu ziehen. Man will entweder blos wissen, wie groß eine gesuchte Linie sey, oder man will zugleich ihre **Lage** kennen. Eben dieser Umstand kommt bey jeder andern mathematischen Aufgabe in Betrachtung. Man will entweder blos wissen, wie groß die gesuchte Größe sey: oder man will zugleich ihre besondre Beziehung gegen andere Größen kennen, ob sie ihnen nämlich entgegen gesetzt, oder nicht entgegen gesetzt sey. Und in dem letzten Fall muß auch dieser Umstand bey den gegebenen Größen, und ihren Verhältnissen gegen einander, in Betrachtung kommen. Wenn der Astronom die Declination eines Sterns sucht, so genügt es ihm nicht, überhaupt zu wissen, wie groß sein Abstand vom Aequator sey; er will zugleich wissen, ob er ihn auf der nördlichen oder der südlichen Halbkugel suchen müsse; ob die Declination des Sterns nördlich oder südlich sey.

§. 8.

Wenn man diese Betrachtungen auf die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen anwendet, so ist leicht zu erachten, daß alles, was davon in den Anfangsgründen der Mathematik gelehret wird, näher eingeschränkt werden müsse, sobald der Unterscheid positiver und negativer Größen in Betrachtung kommt. Vergleicht man in den Anfangsgründen zwo Größen A und B miteinander, so will man blos wissen, wie groß die eine gegen die andere sey: in der Algebra aber will man zugleich wissen, ob A und B einander entgegen gesetzt sind oder nicht. Hieraus ergiebt sich eine Einschränkung des Begriffs von der Gleichheit zwoer Ver-

Verhältnisse, oder der Proportion, worauf man um so mehr bey dieser Streitigkeit Betracht nehmen muß, da die ganze Lehre von den Logarithmen von der Lehre von den Verhältnissen abhängt. Wenn A gegen B eben so groß ist, als C gegen D, so ist das Verhältniß AB dem Verhältniß CD gleich, und es sind A, B, C, D, vier Proportionalgrößen. Dieß lehren die Anfangsgründe, und in den Anfangsgründen wird nie ein anderer Begriff von der Proportion gebraucht. Die Algebra aber, welche allemal auf die specielle Beziehung des Gegensatzes oder Nichtgegensatzes zwoer Größen gegen einander mit siehet, erfordert zur Gleichheit zwoer Verhältnisse noch mehr. Sind A und B einander entgegen gesetzt, so müssen auch C und D einander entgegen gesetzt seyn, sind A und B einander nicht entgegen gesetzt, so muß auch eben dieß von C und D gelten. So ist

$$+A : +B = +C : +D.$$
$$+A : +B = -C : -D.$$
$$+A : -B = +C : -D.$$
$$+A : -B = -C : +D.$$

keinesweges aber $+A : +B = +C : -D$, wenn gleich für sich betrachtet A gegen B so groß ist, als C gegen D. Wollte man bey Vergleichung zwoer Größen gegen einander die Größe der einen gegen die andere ihre relationem quantitativam, und ihre Beziehung gegen einander, vermöge welcher sie entweder entgegen gesetzt sind oder nicht, ihre relationem qualitativam nennen; so könnte man obige Regel so ausdrücken: Wenn zwo Größen sich eben so, wie zwo andere verhalten sollen, so muß zwischen den beyden ersten, und den beyden letzten nicht nur einerley relatio quantitativa, sondern auch einerley relatio qualitativa Statt haben. Diese Regel ist so wichtig, daß man die ganze Algebra über einen Haufen wirft, wenn man sie läugnet.

§. 9.

Durch die algebraische Auflösung einer Aufgabe findet man nie die gesuchte Größe selbst, sondern nur ein Zeichen der gesuchten Größe. Ja noch mehr: man findet eigentlich nur ein Zeichen, welches das Verhältniß der gesuchten Größe gegen die als bekannt angenommene Einheit ausdrückt. Deswegen muß die algebraische Formel nicht nur die relationem quantitativam, sondern zugleich die relationem qualitativam gegen die angenommene Einheit ausdrücken. Dieß ist die Ursache, warum die Regeln der Buchstabenrechnung zugleich zeigen müssen, wie die Zeichen + und — der gegebenen Größen die Zeichen der gesuchten bestimmen. Wenn die Einheit positiv genommen wird, so giebt die Multiplication zweyer Factoren mit einerley Zeichen, ein positives Product, und entgegen gesetzte Factoren geben ein negatives Product. Würde die Einheit negativ genommen, so würde just das Gegentheil dieser Regel gelten. **Aber man nimmt bey algebraischen Rechnungen die Einheit allemal positiv an.** Wiederum ein Hauptumstand, darauf die Sicherheit aller algebraischen Operationen beruhet. Die bekannten Regeln der Multiplication

$$+a \times +b = +ab$$
$$-a \times -b = +ab$$
$$+a \times -b = -ab$$
$$-a \times +b = -ab$$

folgen aus den Proportionen

$$+1 : +a = +b : +ab$$
$$+1 : -a = -b : +ab$$
$$+1 : +a = -b : -ab$$
$$+1 : -a = +b : -ab$$

In keiner dieser Proportionen darf man das Zeichen des letzten Gliedes ändern, wofern die Proportion nicht falsch werden soll.

Aen-

Aendert man aber das Zeichen der Einheit, und schreibt -1 statt $+1$; so muß man in allen vier Proportionen auch das Zeichen des letzten Gliedes ändern.

§. 10.

Es wird nicht undienlich seyn, von dieser allgemeinen Theorie eine Anwendung auf die Geometrie zu machen, indem hiedurch alles so augenscheinlich deutlich wird, daß nicht die geringste Dunkelheit übrig bleibt. Zu dem Ende sollen a und b ein paar Linien bedeuten; so ist bekanntermaßen das Product dieser beyden Linien nichts anders, als die vierte Proportionallinie zu einer Linie, die man für die Einheit annimmt, und den beyden gegebenen a und b: geometrisch findet man, wie aus den Anfangsgründen bekannt ist, diese vierte Proportionallinie auf folgende Art. Auf dem einen Schenkel CA (2 Fig.) eines willkührlich gezeichneten geradlinichten Winkels ACB schneide man die beyden ersten Glieder der Proportion ab, nämlich $CD = 1$, $CE = a$, auf dem zweyten Schenkel CB trage man das dritte Glied $CF = b$ auf, ziehe DF, und hierauf EG mit DF Parallel, so ist

$$CD : CE = CF : CG,$$

$$\text{oder } 1 : a = b : CG,$$

also $CG = ab$. Nun ist Cb in Absicht auf CB negativ, so wie Ca gegen CA negativ ist. Schneidet man also CE auf Ca ab, so ist nunmehro $CE = -a$, und wenn man CF auf Cb abschneidet, so wird $CF = -b$ seyn. Es ergiebt sich in allen diesen Fällen einerley CG der Größe nach, aber nicht der Lage nach. In dem vorigen Fall hatte man $CD = +1$, $CE = +a$, und $CF = +b$ genommen, daher fiel CG auf CB, so daß $CG = +ab$ ward. Nimmt man nun $CD = +1$, $CE = -a$, $CF = -b$ (3 Fig.) und verfährt übrigens, wie vorhin, so fällt CG noch auf CB, und es bleibt dennoch $CG = +ab$, wie die allgemeine Proportion $+1 :$

 $a = b$:

$a = b : + ab$ verlangt. Nimmt man drittens $CD = +1$, $CE = +a$, $CF = -b$ (4 Fig.) und verfährt übrigens noch wie vorhin, so bleibt nicht nur $CD : CE = CF : CG$, und also $CG = ab$, sondern es fällt nun auch CG auf Cb, so das nunmehro $CG = -ab$ wird. Eben dieß erfolgt, wenn man $CD = +1$, $CE = -a$, und $CF = +b$ (5 Fig.) abschneidet, und sodann das obige Verfahren anbringt, es bleibt zwar überhaupt $CD : CE = CF : CG$, aber CG fällt auf Cb, und wird negativ, wie im vorigen Fall. Wenn man die Einheit CD nicht positiv, sondern negativ nimmt, das ist, wenn man sie nicht auf CA, sondern auf Ca abschneidet; so wird in den ersten beyden Fällen CG auf Cb und in den beyden letztern Fällen auf CB fallen. Vieleicht hat es das Ansehen, als ob ich bey gegenwärtiger Untersuchung zu weit in die ersten Anfangsgründe zurück gehe; und in der That würde ich mir selbst diesen Vorwurf machen, wenn die Lehren, worauf es bey der Streitigkeit über die Logarithmen negativer Größen ankommt, in allen Lehrbüchern mit der nöthigen Deutlichkeit auseinander gesetzt würden. Allein ich habe dieses nur selten, außer bey den obangeführten Schriftstellern, angetroffen, und die Folge wird zeigen, daß die Streitfrage sich schwerlich in ihr gehöriges Licht setzen lasse, wenn man über die von mir eben jetzt auseinander gesetzten analytischen Grundbegriffe sich nicht völlig bestimmt erkläret.

§. 11.

Man pflegte wohl ab das Rectangel der Linien a und b zu nennen, und diese Redensart ist in soferne richtig, in wie ferne das Rectangel, dessen Seiten die Linien a und b sind, sich gegen ein Quadrat, dessen Seite $= 1$ ist, verhält, wie das Product ab in Zahlen ausgedruckt zur Einheit. Uebrigens aber bedeutet ab eigentlich allemal eine Linie, nie eine Fläche. So drückt also

auch

auch a zwar das Verhältniß eines Quadrats, dessen Seite = a ist, gegen ein Quadrat aus, dessen Seite = 1; eigentlich aber ist a nichts anders, als die dritte Proportionallinie zu 1 und a, oder auch zu 1 und — a. Ueberhaupt zu sagen giebt es zwischen zweyen nicht entgegen gesetzten Größen zwey der Lage nach unterschiedene mittlere Proportionallinien: Dagegen giebt es zwischen zweyen entgegen gesetzten Größen gar keine mittlere Proportionallinie. Zwischen + 1 und + A ist sowohl + $\sqrt{}$ A, als auch — $\sqrt{}$ A eine mittlere Proportionallinie; aber zwischen + 1 und — A fällt gar keine. Sie müßte entweder positiv oder negativ, oder = 0 seyn, aber von diesen dreyen Fällen kann keiner bestehen, wofern nicht A selbst = 0 ist. Die Operationen, wodurch eine solche mittlere Proportionallinie gefunden werden müßte, widersprechen einander. Solche Größen aber, die man durch widereinander streitende Operationen finden müßte, heißen in der Analysi **unmögliche Größen**. Von der Art wäre $\sqrt{}$ — A. Alles dieses macht die geometrische Construction evident. Es sey A D = + 1, und D B = + A (6 Fig.) man theile A B bey C in zwey gleiche Theile, und und beschreibe mit dem Halbmesser A C einen Zirkel, ziehe darauf durch D eine Perpendicullinie auf A B, und verlängere sie, bis sie den Zirkel trift. Das Stück zwischen D und dem Durchschnittspunct mit dem Zirkel ist zwischen + 1 und + A die mittlere Proportionallinie. Solcher Perpendicul giebt es aber zwey, nämlich D E und D F, also verstattet die Aufgabe eine doppelte Auflösung. Nimmt man aber AD = + 1, DB = — A (7 Fig.) und verfähret wie vorhin, so kann die Perpendicullinie D E oder D F den Zirkel **nicht treffen**, demnach ist es unmöglich zwischen + 1 und — A eine mittlere Proportionallinie zu finden: Das heißt, $\sqrt{}$ — A ist eine unmögliche Größe. Man weis, daß es mit allen Wurzeln gerader Exponenten aus negativen Größen eben die Bewandtniß habe, und eben diese Ausziehung der Wurzeln aus nega-

gati-

gativen Größen hat die Algebraisten zuerst auf die Begriffe unmöglicher Größen geleitet. Man muß aber nicht glauben, daß allein die Ausziehung der Wurzeln zuweilen eine unmögliche Operation sey. Wenn überhaupt eine algebraische Formel so beschaffen ist, daß die Operationen, welche vermöge dieser Formel vorgenommen werden müssen, einander widersprechen, so drückt sie allemal eine **unmögliche Größe** aus.

§. 12.

Diese bisherige Erörterung der Begriffe von der Eintheilung der Größen in positive und negative, muß ich mit einigen Anmerkungen beschließen, die um so viel wichtiger sind, je öfter man bey der Streitigkeit von den Logarithmen negativer Größen dagegen verstossen hat. Das weitsichtigste Auge, welches das größte Feld der entlegensten Sachen sehr deutlich übersieht, entwöhnet sich, nahe liegende Kleinigkeiten deutlich genug wahrzunehmen. Fast kömmt es mir so vor, daß es bey dieser Streitigkeit auf einige kleine Umstände ankomme, die dem Auge der Geometer so nahe liegen, daß die scharfsichtigsten unter ihnen, die das ganze Feld der Mathematik bis auf die entfernsten Gränzen übersehen, sie nur deswegen nicht bemerkt haben. Wenn es seine Richtigkeit hat, daß alles, was von Vergleichung der Größen untereinander in den Anfangsgründen gelehrt wird, näher eingeschränkt werden müsse, wenn der Unterscheid positiver und negativer Größen in Betrachtung kommt; so kann selbst der Begriff der Gleichheit nicht ohne Einschränkung in der Algebra gebraucht werden. Ueberhaupt sind ein paar Linien gleich groß, wenn man sie in Ansehung ihrer Größe für einander setzen kann. Dieser Umstand kann auch bey entgegen gesetzter Lage der Linien Statt haben, und dennoch kann man in der Algebra zwey entgegen gesetzte Größen nie **gleiche** Größen nennen, wenn sie gleich als Größen betrachtet,

ohne

ohne auf die Beziehung des Gegensatzes zu sehen, einander gleich sind. Es ist keinesweges $+a = -a$ wenn gleich a einerley Linie der Größe nach bedeutet. In der Algebra sind nur diejenigen Linien gleich, die sowohl in Ansehung der Größe, als auch in Ansehung der Lage für einander gesetzt werden können. Ohne Zweifel ist $+a = +a$, wäre nun auch $+a = -a$, so müßte die Proportion richtig seyn $+a : +a = +a : -a$, welches dem 8 §. entgegen ist. Jedes Quadrat hat zwo Wurzeln, die zwar als Größen betrachtet, gleich groß, aber einander entgegen gesetzt sind: kann man denn wohl so schließen: es ist $(-a)^2 = (+a)^2$, folglich $-a = +a$? Freylich hat die Regel ihre Richtigkeit: wenn zwey Quadrate gleich sind, so sind ihre Wurzeln gleich. Aber wenn man diese Regel beweißt, so denkt man überall nicht an den Unterscheid positiver und negativer Größen. Sie muß also in der Algebra so angewandt werden, wie es die Natur der Sache leidet. Die Regel redet blos von der Gleichheit der Quadrate und Wurzeln, in soferne sie **Größen sind**, nicht aber in soferne sie die specielle Beziehung des Gegensatzes oder Nichtgegensatzes gegen einander haben können. Soll demnach diese Regel in der Algebra gebraucht werden, so kann sie keinen andern Sinn, als diesen haben: Wenn zwey Quadrate gleich sind, so ist die positive Wurzel des einen so groß, als die positive Wurzel des andern, und die negative Wurzel des ersten gleich der negativen Wurzel des zweyten. Es hat $(-a)^2$ so gut die Wurzel $+a$ als $-a$, und $(+a)^2$ so gut die Wurzel $-a$ als $+a$, und aus der Gleichung $(-a)^2 = (+a)^2$ folgt nichts weiter als dieses, es sey $\pm a = \pm a$. Kann man also wohl mit denen Herren Bernoulli und d'Alenbert schließen: Weil $(-a)^2 = (+a)^2$ so sey $2 \log. (-a) = 2 \log. (+a)$, und folglich $\log (-a) = \log (+a)$. Ich denke, man setzt hiebey stillschweigend voraus, es habe $(-a)^2$ keine andere Wurzel, als $-a$, und $(+a)^2$ keine andere Wurzel als $+a$,

 denn

denn sonst würde die Schlußfolge so aussehen müssen: weil $(-a)^2 = (+a)^2$, (das heißt nichts anders, als weil $+a^2 = +a^2$) so ist $2 \log (\pm a) = 2 \log (\pm a)$: aber das sind zwey besondere Sätze $2 \log (+a) = \log (+a)$, und $2\, l(-a) = 2\, l(-a)$; dieß giebt denn weiter keine andere, als diese Folgen: $l + a = l + a$ und $l - a = l - a$. Doch ich werde im Folgenden die hier verborgen liegenden Fehlschlüsse noch ausführlicher erörtern. Jetzt wende ich mich zur nähern Aufklärung der Begriffe von den Logarithmen.

Begriffe der Logarithmen.

§. 13.

Es giebt eigentlich keine Logarithmen der Größen oder Zahlen für sich betrachtet, es giebt nur **Logarithmen der Verhältnisse**. Dieß liegt schon in der grammaticalischen Bedeutung des Worts ἀριθμος λόγων. Man kann sich jedes Verhältniß als ein solches vorstellen, das aus mehrern andern zusammen gesetzt ist, und man weis auch, daß alle diese Verhältnisse, woraus man ein anders zusammen setzt, gleich groß seyn können. In dem letzten Fall, wird sich eine Zahl angeben lassen, welche ausdrückt, wie oft das einfach angenommene Verhältniß in dem zusammengesetzten enthalten sey. So ist das Verhältniß 2 : 1 in dem Verhältniß 16 : 1 viermal enthalten. Die Zahl **vier** drückt hier die Anzahl dergleichen Verhältnisse aus, welche das zusammengesetzte ausmachen. Man kann hier also das Verhältniß 2 : 1 als das **Maaß** des Verhältnisses 16 : 1 ansehen, indem die Zahl **vier** eben so aus der Einheit entstehet, wie das Verhältniß 16 : 1 aus dem einfachen 2 : 1. So wie aber jedes Maaß überhaupt willkührlich ist, so ist es auch ganz willkührlich, welches Verhältniß man als einfach ansehen, und als ein Maaß der übrigen betrachten will. Diesem-

semnach ist die Vergleichung der Verhältnisse unter einander der Art, wie man gerade Linien, und überhaupt alle Größen von einerley Art mit einander vergleicht, völlig ähnlich. Das Verhältniß, welches man als das einfache angenommen hat, wird nicht in jedem andern gegebenen Verhältniß, so man mit dem einfachen vergleicht, genau etlichemal enthalten seyn, und in diesem Fall hilft man sich eben so, wie bey der Ausmessung gerader Linien, wenn die angenommene Einheit in der auszumessenden Linie nicht etlichemal ganz genommen enthalten ist. Man stellt sich nämlich das einfache Verhältniß wiederum als aus andern kleinern zusammen gesetzt vor, die man als Theile des ganzen betrachtet; und wenn sodann ein solcher Theil des einfachen Verhältnisses in dem andern etlichemal genau enthalten ist; so läßt sich eine gebrochene Zahl angeben, welche aus der Einheit eben so entstehet, wie jenes Verhältniß aus dem angenommenen einfachen sich zusammen setzen läßt. So ist z. E. das Verhältniß 32 : 1 aus dem Verhältniß 16 : 1 so zusammen gesetzt, wie die Zahl $\frac{5}{4}$ aus der Einheit. Ist kein Theil des einfachen Verhältnisses in demjenigen, so damit verglichen wird, genau etlichemal enthalten, und wenn man auch das einfache in noch so kleine Theile eintheilet; so wird die Größe dieses Verhältnisses gegen das einfache sich nicht anders, als durch eine Irrationalzahl ausdrücken lassen. In allen diesen Fällen aber heißt diejenige Zahl, welche die Größe eines Verhältnisses A : B gegen das angenommene einfache ausdrückt, oder welche aus ihrer Einheit so entstehet, wie das Verhältniß A : B aus dem einfachen zusammen gesetzt ist, der **Logarithmus des Verhältnisses** A : B. In dem besondern Fall, wenn B = 1 ist, heißt der Logarithmus des Verhältnisses A : 1 der Kürze wegen der Logarithmus der Größe, oder der Zahl A.

§. 14.

Man kann ein für allemal ein gewisses Verhältniß $a: 1$, als das einfache annehmen, und die Verhältnisse aller übrigen Zahlen zur Einheit damit vergleichen. Auf solche Art wird eine Reihe von Logarithmen bestimmet, die einer Reihe von bestimmten Zahlen oder Größen zugehöret. Eine solche Reihe von Logarithmen, mit ihren zugehörigen Zahlen, macht ein logarithmisches System aus. Man kann also sagen, ein jedes Logarithmensystem sey **willkührlich**, weil es willkührlich ist, wie groß man das einfache Verhältniß $a: 1$ annehmen will. Allein dem ohnerachtet bleibt doch zwischen den Logarithmen und ihren zugehörigen Zahlen eine nothwendige Verbindung, in soferne es nothwendig ist, daß eine bestimmte Zahl diesen und keinen andern Logarithmum haben müsse, sobald festgesetzt ist, wie groß das einfache Verhältniß $a: 1$ seyn soll. Man kann auch sagen, jedes System der bekannten trigonometrischen Linien sey willkührlich, weil es willkührlich ist, wie groß man den Halbmesser des Zirkels annehmen will, sowohl bey der geometrischen Verzeichnung, als auch bey der Berechnung. Allein sobald der Halbmesser bestimmt ist, sobald ist es auch nothwendig, daß ein jeder bestimmter Winkel diesen bestimmten Sinus, Cosinus, u. s. f. und keinen andern haben müsse. Es ist keinem Mathematiker unbekannt, daß beyde Systeme der Logarithmen und trigonometrischen Linien die größte Aehnlichkeit mit einander haben. Wenn die Halbmesser gleich verschieden sind, so sind doch die trigonometrischen Linien, die zu einerley Winkel gehören, in einem **beständigen** Verhältniß. Und eben so ist es mit verschiedenen Logarithmensystemen beschaffen. Wenn gleich die Verhältnisse verschieden sind, die man als die einfachen annimmt, so stehen dennoch die Logarithmen, die zu einerley Verhältniß gehören, in einem **beständigen** Verhältniß.

Man

Man nehme zwey Systeme willkührlich an, das heißt, man setze willkührlich fest, wie groß in jedem das einfache Verhältniß seyn soll, so wird dieses sogleich in die Augen fallen. In dem einen sey $a:1$, in dem andern $a^n:1$ das einfache Verhältniß, so werden die Systeme diese seyn:

1. System.

Die Zahlen

$1, a, a^2 \ldots a^n \ldots a^{2n} \ldots a^{3n} \ldots a^{4n} \ldots a^{5n} \ldots a^{6n} \ldots a^{rn}$

Die Logarithmen

$0\ 1\ 2 \ldots n \ldots 2n \ldots 3n \ldots 4n \ldots 5n \ldots 6n \ldots rn$

2. System.

Die Zahlen

$1, a, a^2 \ldots a^n \ldots a^{2n} \ldots a^{3n} \ldots a^{4n} \ldots a^{5n} \ldots a^{6n} \ldots a^{rn}$

Die Logarithmen

$0\ \frac{1}{n}\ \frac{2}{n} \ldots 1 \ldots 2 \ldots 3 \ldots 4 \ldots 5 \ldots 6 \ldots r$

Diesemnach ist im 1 System $l(a:1) = 1$ im zweyten aber $l(a:1) = \frac{1}{n}$; im 1 System ist $l(a:1)^2 = 2$, und im zweyten System ist $l(a:1)^2 = \frac{2}{n}$ überhaupt ist im ersten System $l(a:1)^{rn} = rn$, und im zweyten wird $l(a:1)^{rn} = r$. Daß also dieß beständige Verhältniß zweyer Logarithmen beyder Systeme, die einem und eben demselben Verhältnisse zugehören, $rn : r = n : 1$ ist.

§. 15.

Ich bin um des Folgenden willen genöthiget, etwas weiter in diese Theorie hinein zu gehen, weil ich glaube, daß der eigentliche Sinn der Streitfrage sich schwerlich genau festsetzen lasse, wofern man nicht alle Umstände in Betrachtung ziehet, die bey wirklicher Berechnung der Logarithmen voraus gesetzt werden. Das ganze Logarithmensystem wird bestimmt, wenn man fest setzet, welches Verhältniß das einfache seyn soll, oder wie groß

die Zahl seyn soll, deren Logarithmus = 1 ist, die sodann bekanntermaßen die Basis des Systems genannt wird. Eben dieß geschieht aber auch, wenn man von irgend einer andern Zahl den Logarithmum willkührlich annimmt. Denn da der angenommene Logarithmus ausdrückt, nach welchem Gesetz das Verhältniß dieser Zahl zur Einheit aus dem einfachen entstanden seyn soll, so wird hiedurch zugleich das einfache Verhältniß, und folglich die Basis des Systems bestimmt. Es ist einerley, ob ich annehme der $log.\ a^n$ soll = 1, oder ob ich fest setze, der $log.\ a^{rn}$ soll = r seyn. Nun sey der Logarithmus des Verhältnisses $1 + A : 1$, oder welches einerley ist, der Logarithmus der Zahl $1 + A = \lambda$ genommen; so bringt man durch folgende Schlüsse heraus, wie aus diesen gegebenen Stücken der Logarithmus jeder andern Zahl gefunden werde. Man theile das Verhältniß $1 + A : 1$ in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, und diese Zahl sey m. Man setze $(1 + A)^{\frac{1}{m}} = 1 + w$, so wird w desto kleiner seyn, je größer m genommen wird, und für $m = \infty$ wird $w = 0$. Man theile jedes andere Verhältniß $1 + B : 1$ in eben so viele gleiche Theile. Ist nun $1 + B = (1 + A)^r$, so wird $(1 + B)^{\frac{1}{m}} = (1 + A)^{\frac{r}{m}} = (1 + w)^r$. Demnach hat man $\frac{1}{m} l\,(1 + A) = l\,(1 + a)$ und $\frac{1}{m} l\,(1 + B) = r\,l\,(1 + w)$, welches die Proportion giebt.

$$\tfrac{1}{m} l\,(1 + A) : \tfrac{1}{m} l\,(1 + B) = l\,(1 + w) = 1 : r = w : rw.$$

Wird m sehr groß genommen, so ist beynahe $(1 + w)^r = 1 + rw$, so daß $1 + rw$ die letzte von den m mittlern Proportionalzahlen zwischen $1 + B$ und der Einheit, $1 + w$, aber die letzte von den m mittlern Proportionalzahlen zwischen $1 + A$ und 1 ist. Es enthält demnach obige Proportion den bekannten Satz: Wenn man zwey Verhältnisse $1 + A : 1$ und $1 + B : 1$ in eine sehr große Anzahl gleicher Theile eintheilet, und zwar so, daß diese Anzahl der Theile für beyde Verhältnisse einerley ist; so verhalten sich die

Loga-

Logarithmen dieser Verhältnisse, wie die Differenzen der letzten beyden mittlern Proportionalglieder von der Einheit. Man kann obige Proportion auch so ausdrücken.

$l(1+A) : l(1+B) = mw : mrw$; und weil $(1+A)^{\frac{1}{m}} = 1 + w$, so wie $(1+B)^{\frac{1}{m}} = 1 + rw$; so wird $w = (1+A)^{\frac{1}{m}} - 1$, und $rw = (1+B)^{\frac{1}{m}} - 1$. Diesemnach erhält man

$$l(1+A) : l(1+B) = mr(1+A)^{\frac{1}{m}} - 1) : m(1+B)^{\frac{1}{m}} - 1).$$

Da nun beständig voraus gesetzt wird, daß m eine sehr große Zahl sey, so ist

$$(1+A)^{\frac{1}{m}} - 1 = \frac{1}{m}(A - \tfrac{1}{2}A^2 + \tfrac{1}{3}A^3 - \tfrac{1}{4}A^4 + \&c.)$$

$$(1+B)^{\frac{1}{m}} - 1 = \frac{1}{m}(B - \tfrac{1}{2}B^2 + \tfrac{1}{3}B^3 - \tfrac{1}{4}B^4 + \&c.)$$

und folglich wird

$(1+A) : l(1+B) = A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 - \frac{1}{4}A^4$ &c. : $B - \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3}B^3$ &c. Aber $l(1+A) = \lambda$ und A selbst sind gegeben, folglich wird $A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3$ &c. : $B - \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3}B^3$ &c. $= \lambda : l(1+B)$, und $l(1+B) = \frac{\lambda}{A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 \&c.}(B - \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3}B^3 - \frac{1}{4}A^4 + \ldots)$. Ist die gegebene Zahl $1 + A = b$, und b die Basis des Systems, so wird $\lambda = 1$, folglich $l(1+B)$

$$= \frac{1}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 \&c.}(B - \tfrac{1}{2}B^2 + \tfrac{1}{3}B^3 - \tfrac{1}{4}B^4 + \&c.)$$

Dieß ist der bekannte allgemeine Ausdruck eines jeden Logarithmen im System, dessen gegebene Basis $= b$ ist, und man weiß, daß der beständige Factor $\frac{1}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \&c.}$ der Modulus des Systems heiße.

§. 16.

Die Logarithmen sind **Verhältnißmaaße** in eben dem Verstande, in welchem die Zirkelbogen **Winkelmaaße** sind. So wie in einerley Zirkel die Winkel verschiedener Sectoren sich wie ihre

ihre Lagen verhalten, so verhalten sich auch, in einerley Logarithmensystem, verschiedene Verhältnisse wie ihre Logarithmen. Hr. d'Alenbert ist zwar mit dieser Redensart nicht zu frieden: mir aber kommen die Gründe, weswegen er sie will verworfen wissen, sehr schwach vor. Er sagt auf der 200 Seite: C'e feroit une grande erreur de penser, que les Logarithmes expriment les rapports; ce feroit, comme si on disoit, que $\frac{\sqrt{2}}{1}$ ou $\sqrt{2} = \frac{1}{2}$ log. 2, ou en general, que $\frac{a}{b} = la - lb$. Aber wer hat das letztere jemals behauptet, und wie kann Herr d'Alenbert den Satz des Hrn. Eulers: die Logarithmen verhalten sich, wie ihre zugehörigen Verhältnisse, so erklären? Wenn man behauptet, daß die Bogen Maaße ihrer zugehörigen Winkel sind, behauptet man damit, daß jeder Bogen seinem zugehörigen Winkel gleich sey? Dieß ist noch niemanden in den Sinn gekommen, da Winkel und Bogen heterogene Größen sind. Es heißt diese Redensart vielmehr so viel: Wenn ein Winkel = 1 gesetzt wird, und sein zugehöriger Bogen auch, so ist die Zahl, welche jeden andern Winkel aus seiner Einheit ausdrückt, eben so groß als die Zahl, die den zugehörigen Bogen aus seiner Einheit ausdrückt. Eben diesen und keinen andern Sinn hat die Redensart: Die Logarithmen sind Maaße ihrer zugehörigen Verhältnisse. Nimmt man ein Verhältniß als einfach an, um die Größe aller übrigen gegen dieß Verhältniß zu bestimmen, und setzt man den Logarithmum des einfachen Verhältnisses = 1, so verhält sich jedes Verhältniß zu dem einfachen, wie der zugehörige Logarithmus gegen die Einheit; oder das Verhältniß ist gegen das einfache so groß, als der zugehörige Logarithmus gegen die Einheit. Die einzige Ursache, warum Herr d'Alenbert diese Redensart mißbilliget, ist wohl diese, weil er die Vergleichung der Verhältnisse, und die Vergleichung ihrer Exponenten, als einerley Sache betrachtet, da doch die Vergleichung

der

der Verhältnisse gegen einander ganz etwas anders ist, als die Vergleichung der Exponenten. Ich muß dieses aus folgenden Worten schließen, die ich auf eben der 200 Seite der Opuscules mathematiques lese: En effet le cas de l'egalité des rapports est le seul, ou les logarithmes soient entr'eux comme les rapports. Ainsi on peut dire, que le logarithme de $\frac{1}{2}$ est a celui de $\frac{2}{4}$ comme $\frac{1}{2}$ est a $\frac{2}{4}$, mais on ne dira jamais, qu'en tout autre cas $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = la - lb : lc - ld$. Versteht man durch $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ die Quotienten, welche heraus kommen, wenn a durch b, und c durch d dividirt wird, so kann man freylich nicht sagen, es sey $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = la - lb : lc - ld$. Dieß hat aber weder Herr Euler, noch sonst irgend ein anderer je behauptet. Wer könnte wohl auf die Gedanken kommen, daß z. E. im briggischen System $\frac{10}{1} : \frac{100}{1} = 1 : 2$ sey, wenn $\frac{10}{1}$ die Zahl 10 und $\frac{100}{1}$ die Zahl 100 bedeuten soll. Die ganze Sache wird hoffentlich durch folgende Betrachtung in ihr völliges Licht gesetzet, und die von Hrn. Euler eingeführte Redensart von allem Zweifel befreyet werden können.

§. 17.

Der Exponent eines Verhältnisses, oder der Quotient, welcher heraus kommt, wenn man ein Glied durch das andere dividirt, drückt keineswegs die Größe des Verhältnisses, sondern vielmehr die Größe des einen Gliedes, gegen das andere aus. So giebt 15 durch 3 dividirt den Quotienten 5, und diese Zahl 5 ist der Exponent des Verhältnisses 15 : 3, oder wie man es auch schreibt $\frac{15}{3}$. Demnach ist zwar der Bruch $\frac{15}{3} = 5$, und 15 ist gegen 3 so groß, als 5 gegen 1. Aber keineswegs heißt dieß eben so viel, als wenn man sagt, das Verhältniß 15 : 3 sey = 5. Bekanntermaßen kann man nie sagen, wie groß eine Sache sey,

wenn man sie nicht mit einer andern, die mit ihr von einerley Art ist, vergleicht, und deren Größe als bekannt voraus gesetzt wird. Man kann nur ausdrücken, wie groß eine Sache gegen eine andere sey, deren Größe man schon kennet, nicht aber, wie groß sie für sich betrachtet sey. Die Frage: wie lang ist eine Ehle? läßt sich nicht beantworten, wofern ich nicht etwa sage, eine Ehle sey 2 Fuß, oder 24 Zoll lang; dann aber gebe ich nicht an, wie groß eine Ehle für sich betrachtet, sondern wie lang sie gegen die Länge eines Fußes oder eines Zolles sey. Wer nicht weis, wie lang ein Fuß, wie lang ein Zoll sey, hört nichts verständliches, wenn ich ihm sage, eine Ehle sey 2 Fuß oder 24 Zoll lang; er ist genöthiget weiter zu fragen: wie lang ist ein Fuß? wie lang ist ein Zoll? und ich mag ihm antworten, was ich will, so wird er fortfahren müssen zu fragen, bis ich zuletzt auf eine Länge komme, die er kennet, oder bis ich ihm sinnlich zeige, wie lang die Länge sey, damit ich die Vergleichung zuletzt angestellet habe. Fragt man demnach, wie groß ist das Verhältniß $a:b$, so kann man gar nicht antworten, wofern man nicht dieß Verhältniß mit einem andern bekannten vergleicht und ausdrückt, wie groß das Verhältniß $a:b$ gegen dieses letztere sey. Die Frage: wie groß ist a gegen b, ist aber von der vorigen Frage sehr unterschieden. Die Antwort auf diese letzte Frage, giebt die Division von a durch b. So groß, als der Quotient oder der Bruch $\frac{a}{b}$ gegen 1 ist, so groß ist a gegen b. Dieß ist es aber gar nicht, was man wissen will, wenn man fragt, wie groß das Verhältniß $a:b$ sey. Diese Frage beantwortet der Logarithmus des Verhältnisses, und es ist das Verhältniß $a:b$ gegen das einfache so groß, als $la - lb$ gegen die Einheit. So ist auch das Verhältniß $c:d$ gegen das einfache so groß, als $lc - ld$ gegen die Einheit. Aber beyde Proportionen

Das

Das Verh. $\frac{a}{b}$: einfachen $= la - lb : 1$.

Das einfache: verhält $\frac{c}{d} = 1 : lc - ld$

geben die dritte: das Verh. $\frac{a}{b}$: Verh. $\frac{c}{d} = la - lb : lc - ld$. Dieß heißt nun nicht so viel, der Exponent des Verhält. $\frac{a}{b}$: verhalte sich gegen den Exponenten des Verh. $\frac{c}{d}$ wie $la - lb : lc - ld$; sondern der Sinn ist dieser: das Verh. $\frac{c}{d}$ lasse sich eben so aus dem Verhältniß $\frac{a}{b}$ zusammen setzen, wie $lc - ld$ aus $la - lb$ gemacht werden kann. Man muß nämlich das Verhältniß $\frac{a}{b}$ in so viele gleiche Theile theilen, als $la - lb$ Einheiten oder Theile der Einheit enthält, und von jenen gleichen Theilen des Verh. $\frac{a}{b}$ so viele nehmen, als $lc - ld$ Einheiten oder Theile der Einheit enthält, die den Theilen in $la - lb$ gleich sind. Herr von Leibnitz hat bey Gelegenheit seines Streits mit dem Hrn. Bernoulli schon die Anmerkung gemacht, daß die Brüche mit den Verhältnissen nicht schlechthin für einerley zu halten seyn, und das bisherige beweißt, das er Recht gehabt habe.

§. 18.

Die Ausmessung der Verhältnisse, vermittelst der Logarithmen, hat übrigens die größte Aehnlichkeit mit der Ausmessung anderer Größen. Von der Verschiedenheit des Maaßes, dessen man sich bey den Messungen bedienet, rührt es her, daß eine und eben dieselbe Größe, bald durch diese, bald durch jene Zahl ausgedrückt wird, nachdem man dieses oder ein anderes Maaß erwählet hat; da dann die Zahlen, welche einerley Größe aus verschiedenen Maaßen ausdrücken, sich umgekehrt, wie diese Maaße

selbst verhalten. Ist z. E. eine Distanz 100 Ruthen lang, und man rechnet 10 Fuß auf einer Ruthe, so ist eben die Distanz 1000 Fuß lang, da dann 100 : 1000 = Fuß : Ruthe. So und nicht anders ist es auch mit den Logarithmen beschaffen. Von der Verschiedenheit desjenigen Verhältnisses, so man zum Maaß aller übrigen Verhältnisse annimmt, rührt es her, daß eines und eben desselben Verhältnisses Größe bald durch diesen, bald durch einen andern Logarithmen ausgedrückt wird, nachdem dieses oder ein anderes Verhältniß zum Maaß aller übrigen erwählet worden: und dann verhalten sich die Logarithmen, welche eben desselben Verhältnisses Größe ausdrücken, umgekehrt, wie die zum Maaß aller übrigen angenommene einfache Verhältnisse. Dieß ist der Grund von der Verschiedenheit der Logarithmensysteme. Man darf nur auf dasjenige zurück sehen, was im 14 §. vorgetragen worden, so ist dieses eine Sache, die sogleich für sich klar ist. Nimmt man in dem allgemeinen Ausdruck des 15 §. $l\,(1+B) = \frac{1}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \&c.}\,(B - \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3}B^3 - \&c.$ die Basin b so an, daß der Bruch $\frac{1}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \&c.}$ $= 1$ wird; so ist bekannt, daß das System, welches auf die Art bestimmt wird, das Natürliche heiße. Muß also in solchem Fall $b = e$ seyn, so ist e die Basis der natürlichen Logarithmen. Man bezeichne die Logarithmen eines andern Systems, dessen Basis b ist, mit L, wenn die natürlichen mit l bezeichnet werden, so hat man $L\,b = 1$ und $l\,e = 1$; ferner wird $l\,b = (b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \&c.$

$$L(1+B) = \frac{1}{(b-1) - \frac{1}{2}(b-1)^2 + \frac{1}{3}(b-1)^3 - \&c.}\,(B - \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3}B^3 - \&c.$$

oder $L\,(1+B) = \frac{1}{l\,b}\,(B - \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3}B^3 - \&c.)$

Aber $\log\,(1+B) = B - \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3}B^3 - \&c.$ folglich $L\,(1+B = \frac{1}{l\,b}\,\log\,(1+B)$

(1 + B), daß also $log(1+B) : L(1+B) = lb : 1 = lb : le$, d. i.
$log(1+B) : L(1+B) =$ Verh. $(b : 1)$: Verh. $(e : 1)$.

§. 19.

Bey dieser bisherigen Ausführung der Theorie von den Logarithmen ist der Unterscheid der Verhältnisse von mir noch gar nicht in Betrachtung gezogen worden, vermöge dessen ihre Glieder einander entgegen gesetzt seyn können. Ich will der Kürze wegen solche Verhältnisse, deren Glieder nicht entgegen gesetzt sind, wie $+a : +b$, oder $-a : -b$ **positive**, diejenigen aber, deren Glieder einander entgegen gesetzt sind, wie $+a : -b$, oder $-a : +b$, **negative** Verhältnisse nennen. Es ist leicht zu erachten, daß dieser Unterscheid mancherley Einschränkungen bey der Theorie von den Logarithmen nothwendig machen werde, da es nun gewiß nicht mehr einerley bleibt, ob das Verhältniß, woraus alle andere zusammen gesetzt werden sollen, positiv oder negativ angenommen wird. Kommt die specielle Beziehung der Glieder gegen einander, vermöge welcher sie entweder einander entgegen gesetzt sind oder nicht, gar nicht in Betrachtung, so sind alle Verhältnisse als positiv anzusehen, und dann läßt sich jedes Verhältniß aus jedem andern zusammen setzen. Es wird nämlich entweder das eine Verhältniß ganz, oder doch ein Theil desselben, in dem andern etlichemal enthalten seyn, wenn man nämlich bey der Theilung jenes Verhältnisses auch bis auf Elementarverhältnisse gehet. Man mag übrigens bey dieser Theilung gehen, so weit man will, so wird jeder Theil allemal wiederum ein positives Verhältniß seyn. Aber es ist noch die Frage, ob sich auch jedes negative Verhältniß aus einem positiven, und umgekehrt jedes positive aus einem negativen zusammen setzen lasse. Es läßt sich leicht zeigen, daß diese Frage keinesweges bejahet werden könne. Die beyden Verhältnisse $+b : +1$ und $-b^{2m} : +1$ sind

so beschaffen, daß das letztere aus dem ersten sich gar nicht zusammen setzen läßt, und man kann die Größe des Verhältnisses $-b^{2m}: +1$ gegen das Verhältniß $+b: +1$ gewiß durch keine mögliche Zahl ausdrücken. Wäre das Verhältniß $(-b^{2m}: +1)$: Verh. $(+b: +1) = \lambda : 1$; so müßte $(-b^{2m}: +1) = (+b: +1)\lambda$ seyn. Man setze aber statt λ eine mögliche Zahl, welche man will, so wird dieser Gleichung nie ein Genüge geschehen können. Deswegen kann λ keine mögliche Zahl seyn. Eben so erhellet, daß sich das Verhältniß $+b^{2m}+1: +1$ aus dem Verhältniß $-b: +1$ gar nicht zusammen setzen lasse. Die Erinnerung ist so nöthig, daß die ganze Entscheidung der Streitigkeit von den Logarithmen verneinter Größen darauf beruhet.

§. 20.

Hiemit muß ich noch folgende Anmerkung verbinden: Eine positive und eine negative Größe sind *entgegengesetzte Größen*, wie z. E. $+a$ und $-a$; allein ein positives und ein negatives Verhältniß, sind keinesweges *entgegengesetzte Verhältnisse*. So ist z. E. das Verhältniß $+a: +1$, keinesweges ein dem Verhältniß $-a: +1$ entgegengesetztes. Entgegengesetzte Größen, müssen für sich betrachtet, unter einem gemeinschaftlichen Hauptbegriff stehen, übrigens aber so beschaffen seyn, daß wenn die eine nach und nach abnimmt, und verschwindet, sie sich in die entgegengesetzte verwandelt. Dieß ist eine allgemein bekannte Sache. Man setze nun das positive Verhältniß $+a: 1$, und lasse a nach und nach abnehmen, so wird dieses Verhältniß schon verschwinden, wenn $a = 1$. Wird $a < 1$, so gehet das Verhältniß $+a: 1$ in den entgegengesetzten Zustand über, ohne daß daraus ein negatives Verhältniß wird. So sind die Verhältnisse $+a: +1$ und $+\frac{1}{a}: +1$ *entgegengesetzte für sich gleiche Verhältnisse*, eben so, wie $+a$ und $-a$ *entgegengesetzte für sich gleiche Größen sind*.

Aber nimmermehr sind $+a:+1$ und $-a:+1$ entgegengesetzte für sich gleiche Verhältnisse. Dadurch daß man $-a$ aus $+a$ macht, setzt man nicht das Verhältniß $-a:+1$ dem Verhältniß $+a:+1$ entgegen, sondern nur die Größe $-a$ der Größe $+a$.

Die Logarithmen negativer Größen sind unmöglich.

§. 21.

Die meisten Streitigkeiten sind so gut als entschieden, sobald man über den eigentlichen Sinn der Streitfrage einig ist. Wenigstens sollte ich glauben, daß in der Mathematik aller Streit aufhören müsse, sobald beyde Partheyen, sowohl über die Bedeutung der einzelnen Worte, als auch über den Sinn des streitigen Satzes völlig einig sind. Mir kommt es so vor, als ob man bey der Streitigkeit über die Logarithmen verneinter Größen es bishero ziemlich verabsäumet habe, den eigentlichen Sinn der Streitfrage (statum controversiæ) genau fest zu setzen. Vielleicht hat man eine gewisse Zweydeutigkeit der Frage: **Ob die Logarithmen verneinter Größen möglich sind?** gar nicht bemerkt, weil man nicht daran gedacht hat, daß der Logarithmus einer Zahl eigentlich der Logarithmus des Verhältnisses dieser Zahl zur Einheit sey, und daß demnach die Frage so verstanden werden müsse, ob die **Logarithmen der Verhältnisse negativer Zahlen zur Einheit möglich seyn**? Wer sieht aber nicht, daß diese Frage, so wie sie hier ausgedruckt ist, noch nicht völlig bestimmt sey, sondern alsdann allererst bestimmt beantwortet werden könne, wenn man fest gesetzt hat, ob die positive oder negative Einheit verstanden werden solle. Auf die Frage: **ob die Logarithmen der Verhältnisse negativer Zahlen zur negativen Einheit möglich sind?** antworte ich mit *Ja*. Fast kommt es mir so vor, als ob die Herren Bernoulli und d'Alenbert die Streitfrage wenig-

nigstens zuweilen in diesem Sinn genommen haben. Manche ihrer Gründe sind so beschaffen, daß sie nichts anders, als dieses beweisen können. Der erste Beweis, womit Hr. d'Alembert auf der 185 Seite seiner Opuscules Mathematiques seine Meynung zu bestätigen sucht, lautet so: En effet 1°, puisque les logarithmes repondans à une progression de nombres quelconque sont arbitraires, qui peut empecher de supposer, que les deux progressions

$$-1 - 2 - 3 - 4 \text{ \&c.}$$
$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \text{ \&c.}$$

considerées comme de progressions *differentes* & *independantes* l'une de l'autre ont les memes logarithmes o, p, q, &c. Soll dieß so viel heißen: $log.\ rat. \frac{-1}{-1} = o = log.\ rat. \frac{+1}{+1}$; $log.\ rat. \frac{-2}{-1} = p = log.\ rat. \frac{+2}{+1}$; $log.\ rat. \frac{-3}{-1} = q = log.\ rat. \frac{+3}{+1}$, &c. so hindert nicht nur nichts, diese Voraussetzung anzunehmen, sondern es ist auch sogar nothwendig derselben beyzupflichten. Weil überhaupt $-n : -1 = +n : +1$, so ist $log.\ (-n : -1) = log.\ (+n : +1)$, das heißt der Logarithmus des Verhältnisses einer negativen Zahl zur negativen Einheit, ist gleich dem Logarithmus des Verhältnisses eben der Zahl positiv genommen zur positiven Einheit. Hierüber ist aber wohl eigentlich kein Streit. Herr von Leibnitz hat dieß nicht geläugnet, Herr Euler auch nicht. Es muß demnach die Streitfrage wohl ohne Zweifel diesen Sinn haben: Sind die Logarithmen **der Verhältnisse negativer Zahlen zur positiven Einheit** möglich? Man nimmt bey allen algebraischen Rechnungen die Einheit positiv an, und man darf diese Voraussetzung nie ändern (§. 9.) Ich denke also, wenn von den Logarithmen einer negativen Zahl die Frage ist, daß man den Logarithmus des Verhältnisses der negativen Zahl zur positiven Einheit verstehen müsse. Hat nun dieß seine Richtigkeit, so ist $l - 1$ soviel als $log.\ rat. \frac{-1}{+1}$, und überhaupt $l - a$ soviel als $log.\ rat. \frac{-a}{+1}$. In diesem

sem Sinn aber beantworte ich die Frage: Ob die Logarithmen negativer Zahlen möglich sind? mit Nein: und ich behaupte mit dem Herrn von Leibnitz und Euler: **die Logarithmen negativer Zahlen sind unmöglich.**

§. 22.

Wenigstens ist soviel gewiß, daß in einem System, in welchem $l + 1 = o$ ist, nicht zugleich $l - 1 = o$ seyn könne. Das heißt, es kann nicht $l\frac{+1}{+1} = l\frac{-1}{+1}$ gesetzt werden. Denn wenn in einerley System die Logarithmen zweyer Verhältnisse gleich sind, so müssen auch die Verhältnisse selbst gleich seyn; dieß kann Niemand läugnen. Wäre also einerley System $l\frac{+1}{+1} = l\frac{-1}{+1}$, so müßte $+1 : +1 = -1 : +1$ seyn. Aber diese Proportion kann schlechterdings nicht als eine wahre Proportion gelten (§. 8.) also kann keinesweges in einerley System $l\frac{+1}{+1} = l\frac{-1}{+1}$ gesetzt werden. Auf eben die Art erhellet, daß überhaupt *in einerley System* eine positive Zahl mit der ihr entgegengesetzten negativen nicht einerley Logarithmen haben könne. Setze man $l + a = l - a$, so hieße das soviel, $l\frac{+a}{+1} = l\frac{-a}{+1}$, demnach wäre $+a : +1 = -a : +1$, daß aber diese Proportion gewiß nicht als eine wahre Proportion gelten könne, habe ich im 8 §. umständlich bewiesen. Indessen scheinet der zweyte Beweis, womit Herr d'Alenbert seine Meynung zu bestätigen sucht, so etwas zu erhärten. Der Beweis ist dieser. Weil $(-1)^2 = (+1)^2$, so sey $2\,log. -1 = 2\,log. +1$, folglich $log. -1 = log. +1 = o$. Wenn aber $log. -1 = o$, so sey $log. -a = log.(+a \times -1) = log + a + log. -1 = log. + a$. Hr. Bernoulli schließt eben so: Wenn $(-a)^2 = (+a)^2$, so sey $2\,l - a = 2\,l + a$, folglich $l - a = l + a$. Ich weis nicht wie es möglich ist, daß beyde Männer die Verwirrungen nicht bemerkt haben, die in diesen Schlüssen stecken. Ich habe bereits

im 12 §. einige Erinnerungen gegen diese Art zu schließen vorgetragen, und ich werde sie jetzt noch etwas genauer prüfen. Herr d'Alenbert meinet zwar, daß dieser Beweis unwiderleglich sey: allein seine eigenen Grundsätze widerlegen ihn. Ich habe schon im 3 §. eine Stelle aus den Opuscules des Herrn d'Alenbert angeführt, woselbst von ihm behauptet wird, die Gleichung $by = (a-x)^2$ sey eigentlich eine falsche Gleichung, wenn $x > a$: die wahre sey diese: $by = (x-a)^2$. Wenn dieß richtig ist, so muß auch $(-a)^2 = (+a)^2$ eigentlich eine falsche Gleichung, und die wahre Gleichung diese seyn $(+a)^2 = (+a)^2$. Daraus folgt weiter nichts, als es sey $l + a = l + a$. Doch dieß sey nur im Vorbeygehen angeführt, um zu zeigen, daß das System des Herrn d'Alenbert mit sich selbst nicht genau zusammen hängt. Ich gebe es zu, daß die Gleichung $(-a)^2 = (+a)^2$ völlig richtig sey: allein die Folge kann ich nicht billigen, wenn man daraus schließt, es sey $2\,l - a = 2\,l + a$, und ich hoffe, daß folgende Betrachtungen die Unrichtigkeit dieser Folge völlig ins Licht setzen werden.

§. 23.

Man ergänze alle ausgelassene Zwischensätze: so muß der Beweis so lauten:

$$\text{Es ist } (-a)^2 = (+a)^2$$

Wenn die Zahlen gleich sind, so sind die Logarithmen gleich, es versteht sich in einerley **Logarithmensystem**. Also ist $l\,(-a)^2 = l\,(+a)^2$.

Der Logarithmus des Quadrats ist doppelt so groß, als der Logarithmus der Wurzel, folglich ist

$$2\,l \sqrt{(-a)^2} = 2\,l \sqrt{(+a)^2}.$$

$$\text{Es ist aber } \sqrt{(-a)^2} = -a \text{ und } \sqrt{(+a)^2} = +a;$$

$$\text{daher wird } 2\,l - a = 2\,l + a$$

$$\text{und } l - a = l + a.$$

Ist

Ist es wahr, daß man an diesem Beweise nichts aussetzen könne, so wird dadurch dargethan, daß *in einerley Logarithmensystem* $l - a = l + a$ sey. Aber nun kann man weiter schließen. Wenn in einerley Logarithmensystem die Logarithmen gleich sind, so sind auch die Zahlen gleich, demnach müßte $-a = +a$ seyn. Daß dieß falsch sey, habe ich schon mehrmalen erinnert. Wenn man es sich indessen einmal erlaubt hat, beym Calculiren nicht an die Sache zu denken, sondern blos bey den Zeichen stehen zu bleiben; so darf man nur noch hinzu setzen: Es ist auch

$+a = +a$, das wird man nicht läugnen.

Nun war auch $-a = +a$, wie erwiesen worden.

Demnach ist $o = 2a$, weil ohne Zweifel gleiches heraus kommt, wenn gleiches zu gleichem addirt wird. Also ist jede Zahl $= o$, denn man kann statt a was man will setzen. Ich denke, diese Ungereimtheit sey zu arg, als daß man nicht gezwungen seyn sollte zuzugeben, es müsse in den Schlüssen ein wichtiger Fehler stecken, die auf so wunderliche Schlußfolgen leiten. Dieser Fehler steckt nun wirklich in den beyden Sätzen $\sqrt{(-a)^2} = -a$ und $\sqrt{(+a)^2} = +a$. Diese Sätze sind so wie sie hier angewandt werden unvollständig. Es hat $\sqrt{(-a)^2}$ keineswegs die Wurzel $-a$ **allein** mit Ausschließung der Wurzel $+a$, und $\sqrt{(+a)^2}$ hat keineswegs die Wurzel $+a$ **allein** mit Ausschließung der Wurzel $-a$. Es ist vielmehr $\sqrt{(-a)^2}$ sowohl als $\sqrt{(+a)^2} = \pm a$, und also kommt kein anderer als dieser Schlußsatz heraus: $l \pm a = l \pm a$. Wenn Hr. Euler in der Histoire de l'Academie de Berlin pour l'année 1749. auf der 147 Seite eben diesen Beweis beurtheilet, so zeigt er, daß man auf eben die Art beweisen könne, es sey $l(a\sqrt{-1}) = l\,a$ wenn man nämlich schließen wollte $(a\sqrt{-1})^4 = (+a)^4$, also $4\,l(a\sqrt{-1}) = 4\,la$, folglich $l(a\sqrt{-1}) = la$. In diesen und allen ähnlichen Beweisen, steckt

mit dem vorigen einerley Fehler; $(a\sqrt{-1})^4$ hat so gut die Wurzeln $+a$, $-a$, $+a\sqrt{-1}$, $-a\sqrt{-1}$, als sie $(+a)^4$ hat, und es folget also nur dieses, es sey $l\begin{smallmatrix}\pm a\\ \pm a\sqrt{-1}\end{smallmatrix} = l\begin{smallmatrix}\pm a\\ \pm a\sqrt{-1}\end{smallmatrix}$.

§. 24.

Wenn demnach keinesweges $l+a = l-a$ seyn kann, und zwar, wie ich ausdrücklich dabey erinnert habe, **in einem und eben demselben System**; so fragt es sich weiter: was ist dann $l-a$ in eben dem System, in welchem $l+a$ eine mögliche Zahl ist? Ich behaupte: in einem System, in welchem $l+a$ eine mögliche Größe seyn soll, muß $l-a$ eine eben so unmögliche Größe seyn, als nach aller Geständniß in der Algebra $\sqrt[2m]{-a}$ ist. Denn es sey $l+a : l-a = 1 : \lambda$, so muß $l-a = \lambda\, l+a$, und $-a = (+a)^\lambda$ seyn. Nun ist es schlechterdings unmöglich statt λ eine Zahl zu setzen, welche macht, daß beyde Glieder dieser Gleichung einander gleich werden. Demnach ist λ eine unmögliche Zahl, folglich ist es auch $l-a = \lambda\, l+a$, wenn $l+a$ möglich seyn soll. Man beweißt auf eben die Art, daß $\sqrt{-a^2}$ unmöglich sey. Man schließt: es sey $\sqrt{-a^2} = y$, so müßte $y \times y = -a^2$ seyn. Nun kann man statt y keine mögliche Zahl setzen, dieser Gleichung ein Gnüge zu leisten: also ist y unmöglich. Kann man an diesem Beweise nichts aussetzen, so kann man es gewiß auch an jenem nicht; hat es aber mit diesem Beweise seine Richtigkeit, so schließe ich weiter. In einem Systeme, worinn alle positive Zahlen mögliche Logarithmen haben, sind die Logarithmen aller negativen Zahlen unmöglich. Denn man setze in der Gleichung $-a = (+a)^\lambda$ statt a eine positive Zahl, welche man will, so wird λ allemal unmöglich bleiben, folglich auch $\lambda\, l+a$, wenn $l+a$ allemal möglich ist. Nun darf ich nur hinzusetzen: **Im nepperschen und briggischen System sind die Logarithmen aller positiven Zahlen**

len möglich, dieß ist eine Voraussetzung, die allgemein angenommen wird. Also folgt der Schluß: **Im nepperschen und briggischen System sind die Logarithmen aller negativen Zahlen unmöglich.**

§. 25.

Wenn die Voraussetzung nicht beybehalten wird, daß von einem und eben demselben System die Rede sey, so verliert der Beweis sein ganzes Gewicht. Es versteht sich von selbst, daß die Regel nicht mehr gelte: wenn die Logarithmen gleich sind, so sind die Zahlen, oder die Verhältnisse derselben zur Einheit gleich, wenn der eine Logarithmus zu einem andern System, als der andere gehört. Hieraus ergiebt sich eine neue Zweydeutigkeit der Streitfrage über die Logarithmen verneinter Größen, welche man, wie es mir wenigstens vorkommt, ebenfalls von beyden Seiten nicht genug in Betrachtung gezogen hat. Die Frage: sind die Logarithmen verneinter Größen möglich? kann so viel heißen: Sind die nepperschen oder die briggischen Logarithmen verneinter Größen, oder auch noch allgemeiner; Sind die Logarithmen verneinter Größen, in einem gegebenen System möglich? Eben diese Frage kann auch so erkläret werden: **Läßt sich gar kein Logarithmensystem angeben, worinn die verneinten Zahlen mögliche Logarithmen haben.** In der That hat dieser doppelte Sinn der Streitfrage zu mancher Verwirrung Gelegenheit gegeben. Die Gründe des Hrn. d'Alenbert sind zum Theil so beschaffen, daß sie nichts weiter beweisen können, als man müsse überhaupt zugeben, daß sich gar wohl Logarithmensysteme angeben lassen, worinn die Logarithmen negativer Zahlen möglich sind. Da er inzwischen mit dem Hrn. Bernoulli darauf dringt, es müsse allemal $l + a = l - a$ seyn, so sieht man wohl, daß er auch die Frage, in dem ersten Sinn genommen, bejahet habe. Denn

bey ihm kann in der Gleichung $l + a = l - a$ das l sowohl einen Nepperschen, als auch Briggischen, ja eines jeden andern Systems Logarithmen bedeuten. Herr Euler beweißt, daß die nepperschen Logarithmen negativer Zahlen alle unmöglich sind, da sich im Gegentheil unter den unzählig vielen nepperschen Logarithmen einer positiven Zahl allemal ein möglicher befindet. Hr. d'Alenbert beweißt wenigstens mit manchen von seinen Gründen nichts weiter als dieses, man könne Logarithmensysteme angeben, worinn negative Zahlen mögliche Logarithmen haben. Das pflegte man sonst in der Vernunftlehre eine fallaciam ignorationis elenchi zu nennen.

§. 26.

Beyde Partheyen werden, wie ich wenigstens glaube, einen ziemlichen Schritt zum Vergleich thun, sobald von beyden Seiten zugegeben wird, daß sich allerdings Logarithmensysteme angeben lassen, worinn negative Zahlen mögliche Logarithmen haben. Herr d'Alenbert redet zuweilen so: Les logarithmes des quantités negatives *peuvent être regardés* comme réels (183 Seite) le log. — 1 est ou *peut être supposé* = o (185 S.) zuweilen aber ganz anders: le logarithme de 2 & le logarithme de — 2 *doivent* être les mêmes, puisque faisant log. 1 = o & log. 4 = p on aura log. 2 & log. — 2 = $\frac{1}{2}$p (187 S.) eben dieß sagt er auf der 198 Seite. En effet soient 1 & a² deux nombres positifs & réels, qui ayent o & p pour logarithmes; il est evident, que la moyenne proportionelle entre 1 & a² sera egalement + a & — a, & que le logarithme correspondant sera $\frac{1}{2}$p. Donc $\frac{1}{2}$p = $l + a$ & $\frac{1}{2}$p = $l - a$. Nichts ist gewisser, als daß sowohl $+a$ als $-a$ zwischen $+1$ und $+a^2$ eine mittlere Proportionalgröße sey. Und eben von diesem Umstand rührt alle anscheinende Schwierigkeit bey der Streitfrage her. Hätte Herr d'Alenbert daraus nichts weiter als

die-

dieses geschlossen: Wenn $l+1=o$ und $l+a^2=p$ sey, so könne überhaupt zu sagen $l+a=\frac{1}{2}p$, es könne auch $l-a=\frac{1}{2}p$ gesetzt werden; so würde ich ihm völlig Beyfall geben. Allein weiter folgt auch nichts daraus, und am allerwenigsten dieses, daß in eben dem System, wo man $l+a=\frac{1}{2}p$ gesetzt hat, auch zugleich $l-a=\frac{1}{2}p$ gesetzt werden müsse. Entweder man muß voraussetzen, daß $+a=-a$ sey, und dann muß zuforderst ausgemacht werden, ob diese Voraussetzung bestehen könne; oder man muß zugeben, daß ein ganz anderes System heraus komme, wenn man $l+a=\frac{1}{2}p$ setzt, als heraus kommt, wenn $l-a=\frac{1}{2}p$ gesetzt worden. Beyde Systeme werden diese seyn.

1. System.

Die Zahlen

$1+a^1+a^2+a^3+a^4+a^5+a^6+a^7+$ &c.

Die Logarithmen

$0 \quad \frac{1}{2}p \quad p \quad \frac{3}{2}p \quad 2p \quad \frac{5}{2}p \quad 3p \quad \frac{7}{2}p$ &c.

2. System.

Die Zahlen

$1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6-a^7+$ &c.

Die Logarithmen

$0 \quad \frac{1}{2}p \quad p \quad \frac{3}{2}p \quad 2p \quad \frac{5}{2}p \quad 3p \quad \frac{7}{2}p$ &c.

§. 27.

Es ist nicht zu läugnen, daß im zweyten System $log-a$, $log-a^3$ und überhaupt $log-a^{2m+1}$ mögliche Zahlen sind. Dagegen aber sind $log.-a$, $log.-a^3$, und überhaupt $log-a^{2m+1}$ im ersten System unmöglich. (§. 24.) Wäre im ersten System $l+a^{2m+1}$ $l-a^{2m+1}=1:\lambda$, so würde $l-a^{2m+1}=\lambda\, l+a^{2m+1}$,

und

und $-a^{2m+1} = (+a^{2m+1})\lambda$. Hier läßt sich gewiß keine mögliche Zahl statt λ setzen, daher ist unstreitig $l - a^{m+1} = \lambda\, l + a^{2n+1} = \lambda \frac{(2m+1)p}{2}$ unmöglich, wenn p möglich ist, wie hier vorausgesetzt wird. Wenn aber in einem System eine Zahl keinesweges den Logarithmum haben kann, den sie in dem andern hat, so sind beyde Systeme gewiß nicht einerley. Im zweyten von diesen beyden Systemen ist also überhaupt $l - a^{2m+1}$ möglich: allein bey dem allen bleiben $l - a^2$, $l - a^4$, und überhaupt $l - a^{2m}$ unmöglich, nämlich in eben diesem System. (§. 24.) Wäre in diesem System $l + a^{2m} : l - a^{2m} = 1 : \lambda$, so würde $l - a^{2m} = \lambda\, l + a^{2m}$, folglich $-a^{2m} = (+a^{2m})\lambda$ seyn. Daß hier abermal λ unmöglich sey, fällt in die Augen: also ist es auch $l - a^{2m} = \lambda\, l + a^{2m} = m\, \lambda\, p$, weil p möglich ist. Wenn also gleich in einem gewissen System einige negative Zahlen mögliche Logarithmen haben, so folgt daraus noch nicht, daß die Logarithmen aller negativen Zahlen in eben diesem Systeme möglich sind. Zugleich fällt in die Augen, daß in eben diesem System $l + a^{2m+1}$ unmöglich sey. Verhielte sich nämlich $l - a^{2m+1} : l + a^{2m+1} = 1 : \lambda$, so würde $l + a^{2m+1} = \lambda\, l - a^{2m+1}$ seyn müssen, und folglich $+a^{2m+1} = (-a^{2m+1})\lambda$. Aber es thut keine mögliche Zahl, die man statt λ setzen könnte, dieser Gleichung ein Genüge. Also ist λ unmöglich, folglich auch $l + a^{2m+1} = \lambda\, l - a_2^{2m+1} = \lambda \frac{(2m+1)}{2} p$ unmöglich, wenn p möglich ist.

§. 28.

Aus dieser Vergleichung beyder Systeme schließe ich die wichtige Folge. Wenn der Unterschied, positiver und negativer Verhältnisse in Betrachtung kommt; so bestimmt die gegebene Basis allein nicht das ganze Logarithmensystem. Wenn man nämlich in dem System die übrigen Verhältnisse, welche aus dem

Ver-

Verhältniß der Basis zur Einheit, ganz genommen, nicht können zusammen gesetzt werden, aus Theilen des einfachen, zusammen setzt; so kann der Theil des einfachen, welchen man hierzu erwählet, so gut negativ als positiv seyn, wenn gleich das angenommene einfache Verhältniß positiv ist. Soll demnach die ganze Reihe der übrigen Zahlen nebst ihren Logarithmen bestimmt werden; so kommt es noch darauf an, was man für einen Theil des einfachen Verhältnisses erwählen will. Wählt man einen negativen Theil, so kann nicht alles dasjenige schlechthin bestehen, was sonst von den Logarithmen in den Lehrbüchern bewiesen wird, weil dabey der Unterschird positiver und negativer Verhältnisse gar nicht in Betrachtung gezogen zu werden pflegte. (§. 19.) So fällt es gleich in die Augen, daß die sonst gewöhnlichen Lehren von den Modulis verschiedener Systeme nun nicht schlechthin mehr gelten können. Wenn sonst in verschiedenen Systemen, die zu einerley Zahl gehörigen Logarithmen durchgängig ungleich sind, so sind sie es bey Systemen, wie im §. 26. angenommen worden, nicht durchgängig. So sind $l+a^2$, $l+a^4$ und so f. in beyden Systemen gleich. Hierüber muß man sich nicht wundern, da viele andere sonst allgemeine Lehren nicht mehr gelten, sobald der Unterscheid des Positiven und Negativen in Betrachtung kommt. Wenn die Wurzeln ungleich sind, so sind auch die Quadrate ungleich: Dieß ist sonst eine allgemeine Regel. Aber $+a$ und $-a$ sind ungleich, dem ohnerachtet sind $(+a)^2$ und $(-a)^2$ einander gleich. Sonst hängen die Logarithmen verschiedener Systeme nach einem beständigen Modulo von einander ab, und zu einerley Zahl gehörige Logarithmen verhalten sich in verschiedenen Systemen, wie die Moduli. Dieß hat den Grund, weil das einfache Verhältniß nur auf einerley Art in zwo Hälften, in vier Viertel, u. s. f. eingetheilet werden kann, wenn an die negativen Verhältnisse gar nicht gedacht wird. Wenn

daher ein anderes Verhältniß, als vorher, für die Hälfte, den vierten Theil, und so f. des ganzen genommen wird, so muß auch nothwendig das jetzige Ganze ein anders als das Vorige seyn. Ist vorher $la = \frac{1}{2}$ gewesen, so war $la^2 = 1$. Nimmt man nun $la = \frac{1}{2}$, so wird $la^2 = 1$. Man kann keine Aenderung von dieser Art vornehmen, ohne zugleich die Basin, und hiemit die Logarithmen aller Zahlen zu ändern, und zwar umgekehrt, wie sich diejenigen Verhältnisse ändern, welche man in diesen verschiedenen Voraussetzungen, als die Hälfte des ganzen, u. s. f. ansieht. Allein, wenn man einmal $l+a = \frac{1}{2}$ genommen hat, und setzt nun $l-a = \frac{1}{2}$, so bleibt das Ganze eben dasselbe, und es ändern sich nicht aller Zahlen Logarithmen. Kommt demnach der Unterscheid negativer und positiver Verhältnisse in Betrachtung, so bestimmt zwar die Basis alle Verhältnisse, die aus dem einfachen, nach einem ganzen Exponenten können zusammen gesetzt werden, nicht aber alle diejenigen, so man nach einem gebrochenen Exponenten daraus zusammen setzen kann.

§. 29.

Hieraus schließe ich die Folge, wenn der Unterschied positiver und negativer Verhältnisse in Betrachtung kommt, so wird das Logarithmensystem alsdann allererst völlig bestimmt, wenn man fest setzet, **welcher Theil des einfachen Verhältnisses für das gemeinschaftliche Maaß aller angenommen werden soll.** Die Logarithmen des Systems sollen die Größe aller Verhältnisse gegen das einfache aus einem gemeinschaftlichen Maaß ausdrücken (§. 13.). Jeder Logarithmus muß ausdrücken, **aus welchem Theil** des einfachen Verhältnisses, und wie oft genommen dasjenige zusammen gesetzt sey, welches diesen Logarithmen zugehöret. Nachdem nun dieß gemeinschaftliche Maaß verschieden ist, nachdem kommen unstreitig verschiedene Systeme heraus, und

wenn

wenn dieß gemeinschaftliche Maaß, ein negatives Verhältniß ist, so kommt gewiß ein anderes System heraus, als wenn dazu ein positives Verhältniß erwählet wird. Denn es können in diesen verschiedenen Voraussetzungen nicht durchgängig einerley Zahlen einerley Logarithmen zugehören. Es sey $+b : +1$ das einfache Verhältniß, und man theile es in $2m$ gleiche Theile, so daß das gemeinschaftliche Maaß aller $= (+b)^{\frac{1}{2m}} : +1$ sey. Nimmt man $+(+b)^{\frac{1}{2m}} : +1$ für das gemeinschaftliche Maaß aller andern Verhältnisse, so gehört der Logarithmus $\frac{2n+1}{2m}$ dem positiven Verhältniß $+b^{\frac{2n+1}{2m}} : +1$, und der Logarithmus des negativen $-b^{\frac{2n+1}{2m}} : +1$ ist unmöglich (§. 24. 26.). Umgekehrt nimmt man $-(+b)^{\frac{1}{2m}} : +1$ für das gemeinschaftliche Maaß aller, so ist $\frac{2n+1}{2m}$ der Logarithmus des negativen Verhältnisses $-b^{\frac{2n+1}{2m}} : +1$, und der Logarithmus des positiven $+b^{\frac{2n+1}{2m}} : +1$ ist unmöglich. (§. 27.) In dem System, welches $+b^{\frac{1}{2m}} : +1$ für das gemeinschaftliche Maaß aller Verhältnisse nimmt, sind die Logarithmen aller positiven Zahlen möglich, und die Logarithmen aller negativen Zahlen unmöglich. In dem System aber, welches $-b^{\frac{1}{2m}} : +1$ für das gemeinschaftliche Maaß aller Verhältnisse nimmt, sind die Logarithmen der positiven Zahlen $+b^{\frac{2n}{2m}}$ möglich, und der negativen $-b^{\frac{2n}{2m}}$ unmöglich, aber die Logarithmen der positiven Zahlen $+b^{\frac{2n+1}{2m}}$ unmöglich, und die Logarithmen der negativen $-b^{\frac{2n+1}{2m}}$ möglich.

§. 30.

Wenn das einfache Verhältniß $+b : +1$ sich in eine ungerade Anzahl von Theilen $2m+1$ so eintheilen läßt, daß $(+b)^{\frac{1}{2m+1}} : +1$ das gemeinschaftliche Maaß, aller andern Verhältnisse wird; so fällt alle Schwierigkeit weg, und es haben nothwendig alle positive Verhältnisse mögliche, und alle negative Verhältnisse

unmögliche Logarithmen. Aber es kann weder $(+b)_{\frac{1}{2m}}; +1$, nach $(+b)_{\frac{1}{2m+1}}: +1$ das gemeinschaftliche Maaß aller Verhältnisse seyn, wofern nicht m unendlich groß genommen, und also $(+b)_{2\frac{1}{m}}: +1$, oder auch $(+b)_{\frac{1}{2m+1}}: +1$ ein Elementarverhältniß wird. Das Verhältniß $(+b)_{\frac{1}{2m+1}}: +1$ ist allemal positiv, was auch m bedeutet, und daher ist kein Zweifel, daß nicht $(+b)_{\frac{1}{2m+1}}: +1 = +1 : +1$ seyn sollte, wenn $m = \infty$. Aber $(+b)_{2\frac{1}{m}}: +1$ ist allemal zweydeutig, m mag so groß genommen werden, wie man will. Ich sehe also auch nicht ab, daß man so schlechthin behaupten könne, es sey $(+b)_{1\frac{1}{m}}: +1 = +1 : +1$, wenn m unendlich groß ist, mit unbedingter Ausschließung des andern möglichen Werths $+b_{2\frac{1}{m}}: +1 = -1 : +1$. Es ist wahr, für $m = \infty$ wird $2m+1 = 2m$, und daher $(+b)_{2\frac{1}{m}}: +1 = (+b)_{\frac{1}{2m+1}}: +1$. Dieß scheint zu beweisen, daß für $m = \infty$ alle Zweydeutigkeit aufhöre: Allein man könnte einwenden, weil für $m = \infty$, $2m = 2m+1$, so sey dieß vielmehr ein Beweis, daß jedes Elementarverhältniß zweydeutig werde, indem die 1 gegen $2m$ verschwinde. Soll man also genöthiget seyn $(+b)_{2\frac{1}{m}}$ allemal $= +1$ zu nehmen, so muß dieses von einer andern Ursache herrühren. Diese Ursache ist nun in nichts anders, als darinn zu suchen, weil dieß bey dem gebräuchlichen Logarithmensystemen eine unläugbare allgemeine Voraussetzung ist, daß alle positive Größen mögliche Logarithmen haben sollen, und weil in keinem System der Logarithmus einer positiven und der ihr entgegengesetzten negativen Größe beyde zugleich möglich seyn können. (§. 24. 27.) Aus diesen beyden Sätzen folgt schon, es müsse $b\frac{1}{\infty}$ allemal $= +1$ genommen werden, damit $l+1 = \frac{1}{\infty}\, lb = o$ werde. Denn setzte man $b\frac{1}{\infty} = -1$, so würde $l-1 = o$ und $l+1$ unmöglich werden.

§. 31.

Ein Logarithmensystem, worinn man alle und jede Verhältnisse aus dem Elementarverhältnisse $-b\frac{1}{\infty}:+1$ zusammen setzte, würde ohne Zweifel von demjenigen sehr unterschieden seyn, in welchem $+b\frac{1}{\infty}:+1$ für das Elementarverhältniß genommen wird. Ist $b\frac{1}{m}:+1$ von dem einfachen Verhältniß derjenigen Theile, woraus alle andere zusammen gesetzt werden sollen; so stellt der Ausdruck $(b\frac{1}{m}:+1)^n$ alle andere Verhältnisse vor, da dann, wenn m unendlich groß ist, auch n unendlich groß wird; Man setze $\frac{n}{m}=x$, so ist der allgemeine Ausdruck aller Verhältnisse $b^x:+1$. Wächst x um das Differential dx, so hat man $b^{x+dx}:+1=(b^x:+1)\times(b^{dx}:+1)$. Wächst aber $(b\frac{1}{m}:+1)^n$ $=b^{\frac{n}{m}}:+1$ um ein Elementarverhältniß, so erhält man $(b^{\frac{n}{m}}:+1)$ $\times(b^{\frac{1}{m}}:+1)$. Da aber $b^x:+1=b^{\frac{n}{m}}:+1$, so ist $b^{dx}:+1=b^{\frac{1}{m}}:$ $+1$ und $dx=\frac{1}{m}$. Ist nun das Elementarverhältniß $b^{\frac{1}{m}}:+1$ positiv, so kann durch die Zusammensetzung nie ein negatives daraus werden, es ist vielmehr $bx:+1$ allemal positiv, und x beständig der Logarithmus einer positiven Größe b^x, was auch statt x gesetzt wird, da denn allemal $l-b^x$ unmöglich seyn muß. Ist aber $b^{\frac{1}{m}}:+1$ negativ, so kann b^x weder alle positive, noch alle negative Größen bedeuten, und b^x ist gar kein quantum secundum legem continui variabile. Nun ist nämlich $b^{dx}=-1$, also b^{x+dx} $=b^x\times-1=-b^x$; so daß b^x gleich in den entgegengesetzten Zustand übergehet, wenn x^a um das Differential dx anwächst, wenn gleich b^x einen endlichen Werth hat. Dieß ist allen Begriffen des continui zuwider. Soll b^x ein continuum seyn, so muß man $b^{x+dx}=b^x$ setzen können. Dieß geht aber schlechterdings nicht an, sobald $b^{dx}=-1$ seyn, und also das Elementarverhältniß, woraus man alle andere zusammen setzt, ein negatives seyn soll.

§. 32.

Aus diesem allen wird die Richtigkeit folgender Sätze erhellen. Wenn das Elementarverhältniß, woraus man in einem Logarithmensystem alle andere zusammen setzt, ein positives, und also $b^{\frac{1}{m}} : +1 = b^{dz} : +1 = +1 : +1$ seyn soll, so haben alle positive Verhältnisse mögliche, und alle negative Verhältnisse unmögliche Logarithmen; es ist ferner b^{z} ein continuum variabile, so daß $b^{z+dz} = b^{z}$. Umgekehrt, wenn b^{z} ein continuum variabile seyn soll, so muß $b^{dz} = +1$, folglich das Elementarverhältniß positiv seyn; es müssen also wiederum alle positive Zahlen mögliche und alle negative Zahlen unmögliche Logarithmen haben. Es muß auch diese Folge richtig seyn: Wenn alle positive Zahlen mögliche Logarithmen haben sollen, so muß $b^{dz} = +1$ seyn, und es darf nicht $b^{dz} = -1$ gesetzt werden, weil sonst nicht alle positive Zahlen mögliche Logarithmen behalten würden. Man setzt in allen algebraischen Rechnungen $b^{0} = +1$, und das bisherige rechtfertiget diese Voraussetzung. Zugleich aber erhellet, daß $b^{0} = +1$ setzen, so viel heiße, als ein Logarithmensystem bestimmen, worinn alle positive Zahlen mögliche und alle negative Zahlen, unmögliche Logarithmen haben. Wenn ich nun hievon die Anwendung mache auf die Art, wie die Logarithmen in den gewöhnlichen Systemen berechnet werden; so beweisen alle Umstände, daß der im 24 §. behauptete Satz weiter gar keinen Zweifeln unterworfen sey. Wenn man im 15 §. $(1+A)^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}(1 + A - \frac{1}{2}A^{n} + \frac{1}{3}A^{3} - \&c.)$ setzt, so ist offenbar, daß man $(1+A)^{\frac{1}{m}}$ positiv nehme, weil sonst alle Glieder dieser Reihe die entgegengesetzten Zeichen haben müßten. Man setze $(1+A)^{\frac{1}{m}} = (1+w)$, da man sonst auch $(1+A)^{\frac{1}{m}} = (-1+w)$ nehmen könnte, wenn m, wie hier vorausgesetzt wird, eine sehr große Zahl ist, die eigentlich, wenn im §. 15. alles in der Schärfe richtig seyn soll, unendlich

lich groß seyn muß. Ist nun, wie §. 31. auch n unendlich groß, und $\frac{n}{m} = x$, so wird $(1 + A)^x = (1 + w)^n$, und wenn $1 + A$ die Basis der natürlichen Logarithmen ist, (§. 18.) so wird $(1 + A)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}$, also $w = \frac{1}{m}$, und $(1 + A)^x = (1 + \frac{1}{m})^{mx}$, weil $n = mx$, oder auch $(1 + A)^x = (1 + \frac{x}{m})^m$, daß also $1 + A = (1 + \frac{1}{m})^m$. Man setze $1 + A = e$, so ist $e = (1 + \frac{1}{m})^m$, und $e^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}$, daß man also $e^{\frac{1}{m}} : + 1 = 1 + \frac{1}{m} : + 1$, folglich das Elementarverhältniß positiv nimmt. Diesemnach ist vermöge dieser Voraussetzung e^x ein variabile *continuum*, und jede positive Größe e^x hat den Logarithmum x, jede negative Größe aber einen unmöglichen Logarithmum, weil es gänzlich unmöglich ist, aus dem Elementarverhältniß $+ e^{\frac{1}{m}} : + 1$ ein negatives zusammen zu setzen. Hiedurch wird zugleich Hrn. Eulers im 3 §. angeführte Erklärung der natürlichen Logarithmen gegen Hrn. d'Alenberts Erinnerungen vertheidiget. Es wird nämlich nothwendig $l\,e^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{m}$, oder $l\,1 + w = w$, so daß $l(1 + w)^n = nw = x$ seyn muß.

§. 33.

Die beyden Gründe des Hrn. d'Alenbert, welche ich im 21 und 23 §. beurtheilet habe, sind diejenigen seiner Beweise, die von ihm raisons purement métaphysiques genannt werden. Ehe er diese beyden Gründe vorträgt, schickt er eine allgemeine Betrachtung voran, die er zwar für keinen eigentlichen Beweis ausgiebt, die aber dennoch dazu dienen soll, seine Meynung einigermaßen wahrscheinlich zu machen. Sie ist diese, wenn x eine algebraische Function von y ist, und zwar so, daß jedem Werth von y nur ein Werth von x zugehört, so muß in dieser Function die Größe y unter keinem Wurzelzeichen enthalten seyn, so einen geraden Exponenten hat. Sodann aber wird x nicht unmöglich, wenn y negativ ist. Aber wenn $x = ly$, so setzt man nach Leibnitzens

nitzens Lehre voraus, jedem gehöre nur ein Werth von x zu. Demnach sey $x = \infty$ für $y = \infty$, $x = -\infty$ für $y = o$, x unmöglich, wenn y negativ. Nun könne man zwar von der Beschaffenheit algebraischer Functionen, auf die Beschaffenheit der Transcendenten nicht schlechthin schließen. Allein es sey doch viel natürlicher, bey der Aehnlichkeit zu bleiben, und anzunehmen, daß wenn y negativ sey, auch x möglich bleibe, und negativ abnehme, so daß beyde Reihen diese werden.

$$y = -\infty \ldots\ldots -3 -2 -1 -\tfrac{1}{2} \ldots -\tfrac{1}{n}\, o \ldots +\tfrac{1}{n} \ldots +\tfrac{1}{2} +1 +2 +3 \ldots +\infty,$$
$$x = +\infty \ldots\ldots +q +p\, o -p \ldots -r \ldots -\infty - . -r \ldots -p\, o +p +q \ldots +\infty,$$

Hiebey muß ich folgendes erinnern. Gesetzt, daß man diese Aehnlichkeit beyzubehalten berechtiget wäre, so würde doch das nicht so schlechterdings folgen, was Herr d'Alenbert daraus schließt, daß es nämlich wahrscheinlich sey, man müsse $l + a = l - a$ nehmen. Man könnte eben so gut auch daraus schließen, daß $l - a = -l + a$ genommen werden müsse. Es ist bekannt, wenn eine veränderliche Größe positiv genommen, bis zu $+\infty$ wächst, und ihre folgenden Werthe möglich bleiben, daß diese nicht nothwendig positiv sind, sondern negativ seyn können, und umgekehrt, wenn diese Größe negativ genommen, bis zu $-\infty$ wächst, daß ihre folgenden Werthe, wenn sie möglich bleiben, nicht nothwendig negativ bleiben, sondern auch positiv werden können. Die Reihen könnten demnach auch so aussehen:

$$y = -\infty \ldots -3 -2 -1 -\tfrac{1}{2} -\tfrac{1}{n} \ldots o \ldots +\tfrac{1}{n} . r\, \tfrac{1}{2} +1 +2 +3 \ldots +\infty.$$
$$x = -\infty \ldots -q -p\, o +p ; +r -\infty \ldots -r \ldots -p\, o\, p\, q \ldots +\infty.$$

Wäre also $log. + 2 = + p$, so könnte auch $log. - 2 = - p$ seyn, wodurch also dieser Grund sein ganzes Gewicht verlieret.

§. 34.

§. 34.

Ich würde nunmehro auch diejenigen Beweise des Herrn d'Alenbert, welche er preuves géométriques nennet, prüfen, wenn nicht diese Abhandlung ohnedem schon ziemlich weitläuftig gerathen wäre. Es läßt sich dasjenige, was ich von diesen verneinten Beweisen zu sagen habe, nicht wohl ins Kurze zusammen ziehen. Die Lehren, worauf bey dieser Beurtheilung alles ankommen wird, sind in den gewöhnlichen Lehrbüchern eben nicht mit derjenigen Vollständigkeit auseinander gesetzt, daß ich nicht Gelegenheit haben sollte, manches in ein besseres Licht zu setzen. Aus dieser Ursache beschließe ich hiemit die erste Abtheilung, und werde in der zweyten alles dasjenige zu widerlegen bemühet seyn, was mit irgend einem Schein gegen die bisherige Lehre eingewandt werden kann. Es wird sich bald finden, wenn man alles nur genau erwägen will, daß die Geometrie der Meynung des Hrn. von Leibnitz keinesweges entgegen sey, sondern sie vielmehr vollkommen bestätige.

Zweyte Abtheilung.

§. 1.

Die Geometrie stimmet in allen Stücken so unvergleichlich mit der Analysi überein, daß die allgemeinen Lehren der letztern Wissenschaft, wenn man sie auf die Geometrie anwendet, oft dadurch allererst in ihr völliges Licht gesetzt werden. Es ist dieß eine Wahrheit, die kein Kunstverständiger bezweifelt. Inzwischen ist so viel gewiß, daß man bey der Anwendung der Analysis auf die Geometrie, in manchen Fällen behutsam verfahren müsse, in-

dem die allgemeinen analytischen Sätze zum Theil etwas unbestimmt lauten. Man hat oft, um der Bequemlichkeit willen die Ausdrücke verkürzt, und daher können sie in der Anwendung leicht zu Fehlschlüssen Gelegenheit geben, wenn man gewisse nothwendige Einschränkungen dabey aus der Acht läßt. Wäre dieß in der Lehre von den Logarithmen nicht geschehen, so würde Niemand auf die Gedanken gekommen seyn, daß man durch geometrische Constructionen für die negativen Größen mögliche Logarithmen herausbringen könne, wenn nämlich die Streitfrage in dem Sinn genommen wird, den ich in der ersten Abtheilung dieser Abhandlung festgesetzt habe. Es ist ein bekannter Satz in der Lehre von den Kegelschnitten, daß die, zwischen den Aesten der Hyperbel, und ihren Asymtoten enthaltenen Trapezien, oder auch die ihnen gleichen Sectoren, sich wie die Logarithmen der ihnen zugehörigen Abscissen verhalten, wenn man diese vom Mittelpunct rechnet. Man hat geglaubt, daß diese hyperbolischen Flächen möglich bleiben, wenn die zugehörigen Abscissen negativ werden, und davon auf die Möglichkeit der Logarithmen negativer Größen den Schluß gemacht. Dieß ist von Herrn Bernoulli, dieß ist auch von Herrn d'Alenbert geschehen: ja letzterer glaubt diesem Beweise erstlich seine rechte Evidenz gegeben zu haben.

§. 2.

Es sey OPVGpF (8 Fig.) die gleichseitige Hyperbel, OG und KZ ihre Asymtoten, ferner AN $= y$; so ist PN $= \frac{1}{y}$, wenn die Potenz der Hyperbel $= 1$ ist, und die Ordinaten PN mit der Asymtote OG Parallel gezogen werden. Ist nun RS eine andere Ordinate, so ist eigentlich NPSR dem Logarithmen des Verhältnisses $\frac{AR}{AN}$ proportional, und in dem Fall, wenn AN $= 1$, ist es eine bloße Verkürzung des Ausdruckes, wenn man sagt, es sey

NPSR

NPSR der Logarithme der Abscisse AR. (1 Abtheil. §. 13.) Man muß eigentlich sagen; jedes Trapezium der Hyperbel, so zwischen zweyen mit der einen Asymtote parallelen Ordinaten fällt, sey der Logarithme des Verhältnisses der diesen Ordinaten auf der andern Asymtote zugehörigen Abscissen: Das unbestimmte Integral $\int \frac{dy}{y} + C$ kann bekanntermaßen ein Trapezium zwischen jeden zweyen parallelen Ordinaten ausdrücken, und es werden zwey Bestimmungen erfordert, wenn man in jedem besondern Fall wissen will, welches das Trapezium sey, so dieses Integral ausdrückt. Die eine Bestimmung erhält man dadurch, daß man die beständige Größe C bestimmt, indem hiedurch festgesetzt wird, welches die Ordinate seyn soll, von welcher die quadrirte Fläche ihren Anfang nimmt: Die andere Bestimmung kömmt hinzu, wenn man für y einen bestimmten Werth setzet; hiedurch bestimmt man die Ordinate, wo die quadrirte Fläche aufhört. Wenn nun AN = 1 ist, so ist die gewöhnliche Voraussetzung diese, die Fläche soll von PN an gerechnet werden, oder das Integral soll $= o$ seyn, wenn $y = 1$ ist. Dieß giebt $ly + C = o$, also $C = - l\,1$, und dann wird das Integral $= ly - l\,1 = l\frac{y}{1} = ly$. Wenn demnach $y = AR$ gesetzt wird; so ist $NPSR = l\frac{AR}{NA} = l\,AR$, weil $AN = 1$. Man setze diese Fläche, welche durch Bestimmung der beständigen Größe in soferne bestimmt ist, daß sie von PN ihren Anfang nehmen soll, überhaupt = S; so ist $S = ly$. Will man nun aus dieser Gleichung alle die Werthe von S folgern, welche allen möglichen, sowohl positiven, als negativen Werthen von y zugehören; so ist unumgänglich nothwendig, daß man den Ausdruck ly nach seinem ganzen Umfang schon kenne, und wisse, was er bedeutet, man mag statt y setzen, was man wolle. Sonst lauft man Gefahr, daß man das schon voraussetze, was erstlich erwiesen werden soll. Da nun hierüber der Streit entstand, so fieng man an, die Sache

umzukehren, und aus den Werthen von S auf die Werthe von ly zu schließen. Man meynte, die Fläche S bleibe möglich für negative y, also müsse auch $l-y$ möglich bleiben. Herr Bernoulli glaubte, die Sache lasse sich am besten aus der Differentialgleichung beurtheilen. Es sey nämlich $dS = \frac{dy}{y}$; wenn man nun $-y$ statt y nehme, so erhalte man $dS = \frac{-dy}{-y} = \frac{dy}{y}$, und also wiederum $S = l-y = l+y$. Folglich gehöre gleichen und entgegengesetzten y eine gleiche Fläche S zu. Hiedurch beweist Hr. Bernoulli ganz richtig, daß zu gleichen und entgegengesetzten z einerley **Differential der Fläche** S gehöre; und es folgt also richtig daraus, daß die Differentiallinien der Logarithmen negativer Größen möglich seyn, welches Niemand läugnet. Aber die Differentialgleichung ist ganz unbestimmt, die Integralgleichung enthält schon eine Bestimmung mehr, wenn die beständige Größe bestimmt ist, und diese Bestimmungen sind es eben, worauf hier alles ankommt. Es ist wahr, für negative y ist $dS = \frac{-dy}{-y}$, aber hieraus folget durch die Integration $S = l-y+C$. Soll nun S noch von eben der Ordinate angerechnet werden, wie vorhin, so muß dieß Integral $=0$ werden für $y=+1$ und es wird also nun $C=-l+1$, und $S = l-y-l+1 = l\frac{-y}{+1} = l-y$, aber keineswegs $= l+y$. Wenn demnach $y = -Ar$, so bedeutet dieß S, die zwischen PN und rs enthaltene Fläche, wie es der ersten Voraussetzung gemäß ist. Will man im Gegentheil, in dem Integral $S = \int\frac{-dy}{-y} + C$ die beständige Größe so bestimmen, daß dieß Integral $=0$ werde für $y = -1 = -An$, so erhält man $C = -l-1$, und $S = l-y - l-1 = l\frac{-y}{-y} = l+y$. Aber nun bedeutet dieß S die Fläche, $npsr$, und keineswegs die vorige, welche zwischen PN und rs enthalten war. Hiemit wird also bewiesen, daß $l\frac{-Ar}{-An} = l\frac{+AR}{+AN}$ sey; und dieß läugnet Niemand (Abtheil. §. 21.) Ueberhaupt erhellet hier=

hieraus, daß es nicht einerley sey, wenn man fragt: ob von der Asymtot *OG* an gerechnet sich auf beyden Seiten, von A nach Z und von A nach K hin, so weit man will, mögliche Flächen erstrecken? und wenn man so fragt: ob sich von einer gegebenen Ordinate *PN* an gerechnet, auf beyden Seiten von N nach Z und von N nach K hin, so weit man will, mögliche Flächen erstrecken? Die erste Frage muß man bejahen; daß aber die andere zu verneinen sey, wird die Folge beweisen.

§. 3.

Herr d'Alenbert hält diesen Beweis des Herrn Bernoulli zwar an sich für richtig, glaubt aber, er könne noch verbessert werden, so daß die Sache dadurch außer allen Zweifel gesetzt werde. In solcher Absicht trägt er ihn auf der 188 S. der Opuscules, in einer allgemeinern Form vor. Da Hr. d'Alenbert diesen Beweis für entscheidend hält, und in der Folge sich allemal darauf wieder bezieht, so werde ich ihn nach allen Puncten genau prüfen müssen. In dieser Absicht wird es am besten seyn, wenn ich denselben zuförderst mit des Herrn Verfassers eigenen Worten ganz hersetze.

Supposons en géneral $dx = \frac{a^n dy}{y^n}$, *n* êtant un nombre entier positif impair, il est certain qu'on pourra construire la courbe à laquelle cette équation appartient. Il faut d'abord tracer les hyperboles OPV, GTK, dans les quelles l'abscisse AN $= y$, & l'ordonnée PN $= \frac{a^n}{y^n}$; il faut ensuite chercher l'aire $\int \frac{a^n dy}{y^n}$ repondante à une abscisse quelconque AR, en supposant, que cette aire soit $= 0$, lorsque $y =$ AN; la courbe, dont les ordonnées seront proportionelles à ces aires sera la courbe cherchée. Or l'on trouvera facilement, qu'à une abscisse quelconque y, positive ou negative, il repond la meme valeur de l'aire. Car soit

An = AN & Ar = AR; l'aire repondante à l'abſciſſe Ar ſera NPoA + AnpG + npſr. Or les aires AnpG, npſr étant negatives par rapport à l'aire NPOA, qui eſt negative elle meme par rapport à l'aire NPSR; il s'enſuit que l'aire repondante à l'abſciſſe negative Ar, c'eſt a dire, l'ordonnée x repondante à cette abſciſſe, équivaut à la quantitè ſuivante — NPOA + NPOA + NPSR = NPSR; d'ou il s'enſuit, qu'à deux valeurs de y égales & de differens ſignes, il répond une même valeur de x. Donc toute courbe, dans laquelle $dx = \frac{a^n dy}{y^n}$, *n* etant un nombre impair quelconque, a deux branches égales, ſemblables & ſemblablement ſituées de part & d'autre de la ligne de x. Il eſt vrai, que dans le cas de n = 1 l'integration n'a pas lieu. Mais la methode, que nous venons de donner pour conſtruire la courbe $dx = \frac{a^n dy}{y^n}$, par la quadrature d'une hyperbole, dont les ordonnées ſoient $= \frac{a^n}{y^n}$, léve toute difficulté. Car l'hyperbole ordinaire, dont les ordonnées ſont $\frac{a}{y}$, eſt précisément dans le même cas, que les autres; & il eſt impoſſible de rien établir ſur les aires repondantes aux abſciſſes de celles ci, qui ne convienne également a l'hyperbole ordinaire.

§. 4.

Herr d'Alembert nimmt hier, wie es ſcheinet, ganz richtig an, daß vermöge der Vorausſetzung, nach welcher bey der Integration die beſtändige Größe beſtimmt werden ſoll, die der Abſciſſe *y* = *Ar* zugehörige Fläche ſich von der Ordinate PN bis zur Ordinate *rv* erſtrecken müſſe. Er ſagt nämlich dieſe Fläche müſſe = NPOA + *AnpG* + *npsr* ſeyn. Hiergegen habe ich noch nichts zu erinnern. Zwar kommen Fälle vor, welche dieſer Vorausſetzung ihre Gränzen ſetzen, und in der That findet ein ſolcher Fall hier in gewiſſer Abſicht Statt. Inzwiſchen muß ich dieſe

Be-

Betrachtung noch aussetzen, und bloß dem Herrn d'Alenbert in seinen Schlüssen folgen. Diese hängen nun eigentlich so zusammen, wenigstens bin ich nicht im Stande, einen andern Sinn, als diesen herauszubringen, ob ich gleich noch immer zweifle, daß Hr. d'Alenbert im Ernst so habe schließen können. Es ist die ganze Fläche zwischen AG und *sr* der Fläche NPOA entgegen gesetzt. Aber NPOA ist negativ in Absicht auf NPSR. Was einer negativen Größe entgegen gesetzt ist, muß positiv seyn; also ist die ganze Fläche $AGsr = AnpG + npsr$ positiv. Da nun NPOA für sich $= AnpG$ und *npsr* für sich $= NPSR$, so ist die zwischen PN und *rs* enthaltene Fläche $= - NPOA + NPOA + npsr = npsr = NPSR$. Aber wenn das richtig schließen heißt, so lassen sich die sonderbarsten Sätze von der Welt demonstriren. Läßt sich nicht auf eben die Art darthun, daß die Absciße $Nr = + NR$ sey? Es ist Ar negativ gegen AN, und NA negativ gegen NR. Weil also Ar der negativen Größe AN entgegen gesetzt ist; so ist Ar positiv, und $Nr = - NA + An + nr = - NA + AN + nr = nr = NR$. Also hätte Hr. d'Alenbert erwiesen, daß einer positiven Absciße, die $= NR$ ist, eine mögliche Fläche $= NPRS$ zugehöre, und er wollte doch beweisen, daß sie zu einer negativen Absciße gehöre. Der Satz; eine Größe, die einer negativen entgegen gesetzt ist, ist positiv, gilt natürlicher Weise nur, wenn beyde sich auf eben dieselbe Gränze beziehen. Soll N die Gränze seyn, welche die positiven Abscißen NR von den negativen Nr absondert, und man soll nun eine Absciße nehmen die NA entgegen gesetzt ist; so muß man sie von dem Punct N an rechnen, und dann fällt sie freylich auf der positiven Seite NZ. Und ob man gleich in einem richtigen Sinn sagen kann, es sey $AN = An$, wenn statt N nunmehro A für den Anfangspunct genommen wird; so wird doch wohl Niemand, wenn die Frage ist, wie groß die Linie Nr sey? im Ernst antworten, es sey $Nr = - AN + AN + nr$

$= nr$

$= nr$: Das hieße ja behaupten, ein Theil sey dem ganzen gleich. Wenn man die algebraischen Zeichen und Redensarten, welche sonst bey entgegen gesetzten Größen gewöhnlich sind, hier richtig anwenden will, so muß man vielmehr sagen, es sey $Nr = nr + An - (-An) = nr + An + An = nr + An + AN$. Es ist nämlich Nr nicht die algebraische Summe, sondern die algebraische Differenz von Ar und $-AN$. Wenn also gleich alles übrige in den vorigen Schlüssen seine Richtigkeit hätte; wenn man gleich in einem richtigen Verstande sagen könnte, es sey $NPOA = -AnpG$, so würde man doch sagen müssen, es sey die zwischen NP und sr enthaltene Fläche $= npsr + AnpG - (-NPOA) = npsr + AnpG + NPOA$.

§. 5.

Ueberdem aber ist auch dieß eine falsche Voraussetzung, daß die Fläche NPOA der Fläche $AnpG$ entgegen gesetzt sey, ob es gleich seine Richtigkeit hat, daß NPOA der Fläche NPSR entgegen gesetzt ist, wenn PN die Grenze ist, von welcher man die Flächen anrechnet. Zwar sind die Ordinaten, welche unter der Abscissenlinie einer krummen Linie fallen, denjenigen entgegen gesetzt, welche über der Abscissenlinie stehen. Aber hievon kann man keinen Schluß machen, auf das Zeichen, welches der Ausdruck der Fläche vor sich haben muß. Dieß kann + oder − seyn, die Fläche mag über oder unter der Axe liegen. Man muß sich nämlich von der Art und Weise, wie eine positive geometrische Größe negativ wird, folgende Vorstellung machen. Jede geometrische Größe ist zwischen gewissen Gränzen eingeschlossen, und nachdem sich diese Gränzen erweitern, oder verengern, nimmt die Größe zu, oder ab. Eine grade Linie hat derselben nur zwo, nämlich den Anfangs- und Endepunct (9. Fig.). Ist ihr Anfangspunct O bestimmt und der Abstand des Endepuncts B von demselben, so

ist

ist ihre Größe bestimmt: Es kann aber bey dem allen der Endepunct sowohl auf der einen als der andern Seite des Anfangspuncts C liegen. Gesetzt B liegt oberhalb des Puncts C, so wird CB kleiner, wenn B gegen C rückt, und größer, wenn B sich von C entfernet. Sobald aber B unterhalb C irgendwo in *b* fällt, wird C*b* negativ, nämlich gegen *CB*: es sey nun, daß B durch c nach *b* hinrückt, oder daß die Construction, welche den Ort des Puncts B bestimmt, auf andere Art ergiebt, daß *b* unter C fallen müsse. Hier ist also **ein Punct** die Gränze, welche das Negative von dem Positiven unterscheidet. Der Ort dieses Puncts kann unbestimmt seyn, so daß z. E. eine grade Linie gegeben ist, worinn er liegen soll, wie AD: und dieß ist der Fall bey den krummen Linien, wenn AD die Axe der Abscissen, CB aber eine Ordinate ist. Mit den ebenen Figuren ist es schon anders bewandt. Ihre Grenzen sind Linien, und es hat dabey eine große Mannigfaltigkeit Statt. Eine ebene Figur kann durch die Erweiterung oder Verengerung ihrer Gränzen auf mannigfaltige Art wachsen, oder abnehmen. Es können alle ihre Gränzen sich nach allen Seiten erweitern, oder umgekehrt verengern, wie wenn der Halbmesser eines Kreises größer oder kleiner würde, oder wenn in einem Parallelogramm sich jede zwo entgegen gesetzte Seiten von einander entfernten. Es kann aber auch seyn, daß nach dieser oder jener Seite die Gränzen sich nicht ändern, da dieß gegentheils nach andern Seiten erfolget; so können zwo entgegen gesetzte Seiten eines Parallelogramms sich von einander entfernen, indem die beyden übrigen ihre Lage unverändert behalten. Es kann der Winkel am Mittelpunct im Ausschnitt eines Cirkels wachsen oder abnehmen, ohne daß sich der Halbmesser ändert, u. s. f. Wenn man die Quadratur einer Linie sucht, deren Natur durch eine Gleichung für parallele Ordinaten ausgedrückt ist, so setzt man voraus, daß die Fläche, deren Größe man finden will, zwischen

zweyen von den parallelen Ordinaten, wie PN, RS, (8 Fig.) und denjenigen Stücken der Axe, und der zu quadrirenden Linie selbst, die zwischen diesen parallelen Ordinaten fallen, wie NR, PS, enthalten sey. Durch die Integration bringt man einen noch ganz unbestimmten Ausdruck für diese Fläche heraus, der ein Stück derselben zwischen jeden zweyen parallelen Ordinaten bedeuten kann. Von diesen parallelen Ordinaten wird die eine durch Hinzusetzung der beständigen Größe bestimmt, z. E. PN, und nunmehro drückt das Integral das Gesetz aus, nach welchem sich die Größe der Fläche ändert, wenn die zweyte Ordinate RS von der ersten entweder weiter fortrückt, oder sich derselben nähert, und es muß die Gränze, welche die positiven Werthe der Fläche von den negativen unterscheidet, eine von den Ordinaten der krummen Linie seyn. Sie ist also entweder PN selbst, oder doch wenigstens eine Linie, die mit PN parallel liegt, wenn etwa das Integral eine solche Function ist, die noch für andere Werthe, als $x = AN$ verschwindet. Deswegen kann es nie die Axe der Abscissen seyn, (es sey dann, daß man die Coordinaten verwechselt, wie sich von selbst verstehet) und der Umstand, ob die quadrirte Fläche unter oder über der Abscissenlinie liege, kann die Frage, ob sie positiv oder negativ sey? gar nicht entscheiden.

§. 6.

Hat nun dieses alles seine Richtigkeit; so bin ich berechtiget zu behaupten, es sey von Hrn. d'Alenbert keinesweges bewiesen, daß der Abscisse Ar die Fläche $nprs = NPRS$ zugehöre. Wenn inzwischen der Beweis eines Satzes fehlerhaft ist, so folgt daraus die Falschheit des Satzes selbst noch nicht. Es kann seyn, daß der Satz selbst aus andern Gründen sich richtig herleiten lasse. Und in der That hat es mit dem eben genannten Satz diese Bewandtniß. Nur muß dieser Satz richtig verstanden werden.

den. Ich sage nicht, die zwischen den Ordinaten PN und *rs* enthaltene Fläche sey $= npsr$, dieß wäre offenbar ungereimt. Ich sage vielmehr so: die der Abscisse $y = - Ar$ in der Integralgleichung $\int \frac{a^n dy}{y^n} + C$ zugehörige Fläche, sey $= npsr$; oder mit andern Worten: wenn man in dem Ausdruck $\int \frac{a^n dy}{y^n}$ die Abscisse $y = - Ar$ setzt, so drückt diese Formul **nicht die Fläche zwischen** *PN* **und** *rs*, sondern *npsr* aus. Dieß ergiebt sich sogleich, wenn man die Integration selbst vornimmt, und wenn Hr. d'Alenbert seinem Beweise diese Wendung gegeben hätte, so würde er dadurch sehr gewonnen haben, obgleich der Hauptsatz, welcher eigentlich erwiesen werden soll, doch daraus nicht folget. Vieleicht hat Hr. d'Alenbert in der That aus dieser Integralformul geschlossen, und seine Schlüsse nur nicht vollständig entwickelt. Er hat es dem Leser überlassen, die ausgelassenen Zwischensätze selbst zu ergänzen. Ich werde aus dieser Ursache diese Integration, nebst ihren Folgen vollständig auseinander setzen, und bemühet seyn, dem Beweise des Hrn. d'Alenberts alle Stärke zu geben, deren er fähig ist. Damit ich nicht genöthiget sey, in der Folge allemal zu erinnern, daß in der Gleichung $PN = \frac{a^n}{y^n}$ die Zahl n eine ungerade Zahl seyn soll, will ich $2m+1$ statt n schreiben, da dann a eigentlich den Exponenten $2m+2$ haben muß, wenn die Abmessungen auf beyden Seiten gleich seyn sollen. Es wird also die Gleichung für die Hyperbel OPVG*p*F (8 Fig.) eigentlich diese: $= \frac{a^{m+n}}{y^{m+1}}$, wenn man $PN = x$ sagt, und $AN = y$. Die Integration giebt, $\int \frac{a^{2m+2}}{y^{2m+1}} dy = C - \frac{a^{2m+2}}{2m y^{2m}}$. Weil dieß Integral $= 0$ seyn soll, wenn $y = AN$ ist, welche Linie ich $= b$ setzen will; so wird $\int \frac{a^{2m+2}}{y^{2m+1}} dy = \frac{a^{2m+2}}{2m b^{2m}} - \frac{a^{2m+2}}{2m y^{2m}} = \frac{a^{2m+2}}{2m} \left(\frac{1}{b^{2m}} - \frac{1}{y^{2m}}\right)$. Setzt man nun, um die Gleichheit der Abmessungen zu erhalten, $ax = \frac{a^{2m+2}}{2m} \left(\frac{1}{b^{m}} - \frac{1}{y^{2m}}\right)$, so wird die Gleichung der Quadratricis diese: $x = \frac{a^{2m+1}}{2m} \left(\frac{1}{b^{2m}} - \frac{1}{y^{2m}}\right)$.

 §. 7.

§. 7.

Da der veränderliche Theil dieses Integrals abnimmt, wenn y wächst, so wächst das Integral selbst mit y, so lange $y > b$ ist, und drückt diesemnach die Fläche NPSR aus. Für $y = b$ ist das Integral $= o$, wie vorausgesetzt worden; aber für $y < b$ wird es negativ, und wächst bis $y = o$ wird, da es negativ unendlich ist. Zwischen den Gränzen $y = b$ und $y = o$ drückt es also die Fläche NPML aus, für $y = AL$. Wird y negativ, so bleibt dieß Integral Anfangs noch negativ, so lange nämlich $-y < -b$ ist, aber es nimmt ab, wenn y wächst. Nimmt man demnach $y = -Al$, und den Punct l zwischen A und n, so daß lm die der Abscisse $-Al$ zugehörige Ordinate ist; so würde es ungereimt seyn zu sagen, daß das Integral noch die zwischen PN und lm enthaltene Fläche ausdrücke, da es offenbar ist, daß diese mit $-Al$ wachsen müsse. Diesemnach muß die Fläche, welche jetzt das Integral ausdrückt, auf der andern Seite der Ordinate lm liegen, und sie ist keine andere als $lnpm$, weil für $y = -An = -b$ das Integral abermal $= o$ wird. Wächst endlich $-y$ über $-b$ hinaus, so wird das Integral wieder positiv, und wächst mit $-y$, da es dann die Fläche $nprs$ ausdrückt. Vermöge dieser Rechnung muß man also so viel zugeben, daß in allen Hyperbeln, welche die Gleichung $= \frac{a^{2m+2}}{y^{2m+1}}$ ausdrückt, den negativen Abscissen mögliche, und eben so große Flächen, als den ihnen gleichen und entgegengesetzten positiven Abscissen zugehören. Nur in dem Fall, da $m = o$, oder die Hyperbel die Apollonianische ist, könnte es zweifelhaft seyn, weil man in diesem Fall aus der Integralformul $\frac{a^1}{o}\left(\frac{1}{b^o} - \frac{1}{y^o}\right)$ so unmittelbar nichts schließen kann. Hr. d'Alenbert selbst ist genöthiget dieses einzugestehen. Il eſt vrai (ſagt er) que dans le cas de $n = 1$ l'integration n'a pas lieu. Allein eben deswegen setzt er einen Grund hinzu, der nach seiner Meynung überzeugend dar-

thun

thun soll, daß alles Vorige noch für die apollonianische Hyperbel gelte. Er ist in den Worten enthalten: L'hyperbole ordinaire est precisément dans le même cas, que les autres, & il est impossible de rien établir sur les aires repondantes aux abscisses de celles-ci, qui ne convienne également a l'hyperbole ordinaire. Ich weis nicht, ob dieß nicht eben dasselbe ist, was Hr. d'Alenbert doch erst beweisen wollte. Doch vielleicht hat Hr. d'Alenbert sich auch hier nicht vollständig ausgedrückt, und dem Leser überlassen, die ausgelassenen Zwischensätze zu ergänzen. Vermuthlich sind die Schlüsse, welche Hr. d'Alenbert hier im Sinne gehabt hat, eigentlich folgende.

§. 8.

Wenn in der allgemeinen Gleichung $\int \frac{a^{2m+2}}{y^{2m+1}} dy = \frac{a^{2m+2}}{2m} \left(\frac{1}{b^{2m}} - \frac{1}{y^{2m}}\right)$ nunmehro $m = 0$ gesetzt wird, so erhält man $\int \frac{a^2}{y} dy = \frac{a}{2 \times 0} \left(\frac{1}{b^{2\times 0}} - \frac{1}{y^{2\times 0}}\right) = \frac{a^2}{2\times 0} \left(\frac{1}{(b^2)^0} - \frac{1}{(y^2)^0}\right)$. Weil nun $\frac{1}{(b^2)^0} = \frac{1}{(b^2)^0} = (b^2)^0$, und $\frac{1}{(y^2)^0} = \frac{1}{(y^2)^{-0}} = (y^2)^0$, so wird das Integral $= \frac{a^2}{2\times 0} (b^{2\times 0} - y^{2\times 0})$; und weil $\frac{a^2}{2\times 0} = \frac{a^2}{2\times -0}$, so wird eben dieses Integral auch $= \frac{a^2}{2\times 0} (y^{2\times 0} - b^{2\times 0}) = \frac{a^2}{2\times 0} \left(\left(\frac{y^2}{b^2}\right)^0 - 1\right) = \frac{1}{2} aa \frac{\left(\frac{yy}{bb}\right)^0 - 1}{0}$. Nun mag diese Formul für sich bedeuten, was sie wolle, so ist doch so viel gewiß, daß sie für gleiche und entgegengesetzte y einerley gebe, eben so, wie der allgemeine Ausdruck, wenn m nicht $= 0$ ist. Wofern die Schlüsse des Hrn. d'Alenberts, wie ich glaube, so zusammen hängen, so habe ich nichts weiter dagegen einzuwenden, vielmehr behaupte ich mit dem Hrn. d'Alenbert, que l'hyperbole ordinaire soit precisément dans le même cas, que les autres. Es gehören nämlich nun in der apollonianischen Hyperbel gleichen und entgegengesetzten Abscissen gleiche Flächen zu. So gehört die Fläche NPSR zur Abscisse + AR, und

zur Absciſſe $Ar = - AR$ gehört die Fläche $npsr = NPSR$. Aber eben dieß iſt dem Satz ſchnurſtracks entgegen, daß zur Absciſſe Ar die zwiſchen PN und rs enthaltene Fläche gehöre. Und alſo läugne ich, daß Hr. d'Alenbert ferner ſo ſchließen könne; die den negativen Absciſſen zugehörigen Flächen ſind die Logarithmen dieſer Absciſſen; alſo ſind die Logarithmen negativer Größen möglich, weil jene Flächen möglich ſind. Der Satz: **Die den negativen Absciſſen zugehörigen Flächen ſind die Logarithmen dieſer negativen Absciſſen**, iſt zweydeutig. Er kann ſo viel heißen: jene Flächen ſind die Logarithmen der Verhältniſſe dieſer negativen Absciſſen zur negativen Einheit, ſo daß zum E. $nprs = l\frac{Ar}{An} = l\frac{-AR}{-AN}$; und in dieſer Bedeutung iſt er richtig. Aber denn hat der Schlußſatz dieſen Sinn: alſo **ſind die Logarithmen der Verhältniſſe negativer Größen zur negativen Einheit** möglich. Dieß läugnet Niemand, und dieß war es nicht, was Hr. d'Alenbert beweiſen wollte. Es kann aber auch der vorhin genannte zweydeutige Satz dieſen Sinn haben: **Die den negativen Absciſſen zugehörigen Flächen ſind die Logarithmen der Verhältniſſe dieſer negativen Absciſſen zur poſitiven Einheit.** Wäre dieß der rechte Sinn, und wäre der Satz in dieſem Sinn genommen; ſo würde kein Zweifel übrig ſeyn, daß die Möglichkeit der Logarithmen der Verhältniſſe negativer Größen zur poſitiven Einheit nicht daraus folgen ſollte. Aber in dieſem Sinn genommen, iſt der Satz grundfalſch. Es iſt keinesweges $npsr$ der Logarithme des Verhältniſſes $\frac{Ar}{AN} = \frac{-AR}{+AN}$ ſondern vielmehr der Logarithme des Verhältniſſes $\frac{Ar}{An} = \frac{-AR}{-AN}$. Alſo ſchließt Hr. d'Alenbert entweder aus einem grundfalſchen Satz: oder ſein Beweis erhärtet auch nichts weiter, als was ſeine Gegner gerne zugeben, und worüber eigentlich nie iſt geſtritten worden.

§. 9.

§. 9.

Wenn ich behaupte, es sey grundfalsch, daß *npsr* der Logarithme des Verhältnisses $\frac{Ar}{AN}$ sey, so fürchte ich zwar im Ernst keinen Zweifel dagegen: inzwischen könnte man vieleicht so schließen: bey der Integration ist vorausgesetzt worden, daß die Fläche von NP angerechnet werden solle; es mag also y bedeuten, was es wolle, so muß man die Fläche von dieser Grenze anrechnen. Nun drückt für $y = Ar$ freylich das Integral nur eine Fläche $= nprs$ aus, aber das ist eben ein Beweis, daß die beyden Flächen ANPO und $AnpG$ einander aufheben, und daß die zwischen PN und rs enthaltene Fläche $= -$ ANPO $+ AnpG + nprs$ $= nprs$ sey, und deswegen muß man einräumen, daß $nprs = l\frac{Ar}{AN}$ sey. Wie gesagt, ich fürchte im Ernst diese Einwendung nicht. Um inzwischen alles aus dem Wege zu räumen, was mit irgend einigem Schein eingewandt werden könnte, will ich auch hierauf antworten. Es ist eine Sache, die man bey den Schriftstellern in der Integralrechnung nicht eben allemal angemerkt findet, die aber für sich leicht in die Augen fällt, daß die erste Voraussetzung, welche bey Bestimmung der beständigen Größe angenommen worden, nicht allemal durch die ganze Fläche der Linie *ausschließungsweise* bestehen könne. Ich will so viel sagen; wenn man annimmt, es soll das Integral für einen gewissen Werth von y (z. E. für $y =$ AN) $= 0$ seyn, so folget hieraus nicht, daß eben das Integral nicht auch für andere Werthe von y verschwinden könne. Die Function, welche man durch die Integration heraus bringt, kann aus mehrern möglichen einfachen Factoren bestehen, und dann giebt es so viele mögliche Werthe der Abscisse, für welche das Integral verschwindet, als mögliche Factoren da sind. Dann aber kann das Integral nicht allemal die Fläche

zwi-

zwischen **jeden zweyen** parallelen Ordinaten ausdrücken, wenn man mit dem Integral auf die sonst gewöhnliche Art umgehet. Es giebt nämlich in solchen Fällen unter den Werthen des Integrals mehrere Maxima und Minima, als man Anfangs vorausgesetzt hat. Wenn man annimmt, das Integral soll für $y = AN$ verschwinden, so nimmt man stillschweigends dabey an, es soll für größere y mit diesem y beständig wachsen, und für kleinere y mit diesen abnehmenden y auf die entgegengesetzte Art beständig wachsen. (Zu den abnehmenden y gehören den auch die negativ wachsenden). Wäre dieß, so müßte das Integral nie mehr, als höchstens ein Minimum und ein Maximum geben. Jenes würde der größte negative, und dieses der größte positive Werth desselben seyn, wenn auf beyden Seiten von PN mögliche Flächen fielen. Aber das Integral giebt oft mehr Maxima und Minima, und sodann muß man in jedem besondern Fall mehreres zu Hülfe nehmen, wenn man bestimmen will, welches Stück der zu quadrirenden Fläche für jeden bestimmten Werth von y das Integral ausdrücken könne. Man muß hiebey zugleich in Betrachtung ziehen, daß zdy nicht allein das Differential der Fläche NPSR, sondern zugleich auch das Differential derjenigen Fläche sey, welche auf der andern Seite der Ordinate z, wie in diesem Fall gegen VZ zuliegt. Aus allen diesen Umständen zusammen genommen, muß es sich ergeben, welches Stück der Fläche das Integral für jeden Werth von y ausdrücke. Die letzte sehr erhebliche Anmerkung hat Hr. Varignon schon in den memoires de l'Academie de Paris l'année 1706. gemacht, da er die von Hrn. Wallis sogenannten **mehr als unendlichen Räume** beurtheilte. Das Integral drückt eigentlich nur im Allgemeinen das Gesetz aus, nach welchem sich die Fläche ändert, wenn die Absciße wächst, oder abnimmt. Die Absciße aber mag wachsen, oder abnehmen, so ist noch nicht bestimmt, ob **die Fläche** wachse oder abnehme.

Dieß

Dieß letztere hängt noch von andern Umständen ab, und die Lage der Fläche gegen die veränderliche Ordinate, kann sehr oft abwechseln. Diesemnach ist es nicht einerley, wenn man fragt: wie groß ist die Fläche, welche zwischen zweyen gegebenen Ordinaten liegt? und wenn man so fragt: welches ist die Fläche, welche die Integralformul für einen gegebenen Werth der Abscisse ausdrückt? Es ist also etwas anders, wenn man fragt: wie groß ist die Fläche zwischen den beyden Ordinaten, die durch die Endpuncte der Abscissen AN und Ar durchgehen; und wenn man so fragt: welches ist dasjenige Stück der Fläche, so die Integralformul ausdrückt, wenn man die Abscisse = Ar setzte.

§. 10.

Daß eine solche Abwechselung von der Lage der quadrirten Fläche gar nicht ungewöhnlich sey, und daß das Integral, so man auf die gewöhnliche Art heraus bringt, nicht allemal diejenige Fläche ausdrücke, die es nach der ersten Voraussetzung auszudrücken scheinen möchte, davon giebt schon die Quadratur der graden Linie ein Beyspiel ab. Es schneide nämlich die gerade Linie MN die Axe BC in A (10 Fig.) unter einen Winkel, dessen Tangente = n. Man nehme den Anfangspunct der Abscissen in A, und es sey AP = x, PM = y, so ist $y = nx$, und $\int ydx = \frac{1}{2} nx^2 + C$. Wenn man die Fläche, welche dieß Integral ausdrückt, von der Ordinate durch A an rechnet, so ist C = o, und es drückt allemal das Stück der Fläche aus, das zwischen der Ordinate durch A und derjenigen Ordinate fällt, die durch den Endpunct der Abscisse gehet, man mag x positiv, oder negativ nehmen. Dieß Integral bleibt positiv, wenn x negativ, z. Exempel = — AQ genommen wird, obgleich AQN die dadurch ausgedruckte Fläche ist, und dieß Stück unter der Abscissenlinie liegt. Aendert man die vorige Voraussetzung, und nimmt an, die Fläche

soll von der Ordinate DE an gerechnet werden, die vom Anfangs- punct der Abscissen um das Stück AD $= a$ absteht, so muß $\frac{1}{2}nxx + C$ verschwinden für $x = a$, also wird $C = -\frac{1}{2}naa$, welches $\int y dx = \frac{1}{2}n(xx - aa)$ giebt. Dieß Integral ist positiv, wenn x positiv und größer als a ist, und es wächst mit x; also drückt es die Fläche DEMP aus, so lange $x =$ AP positiv und größer als a bleibt. Wird $x < a$, so wird dieß Integral negativ und wächst, wenn x abnimmt. Es drückt demnach für $x = Ap$ die Fläche DEmp aus, so lange bis $x = o$, da es $= -\frac{1}{2}naa$ wird, und die Fläche DEA giebt. Für negative x bleibt das Integral Anfangs noch negativ, so lange $-x < -a$ genommen wird. Aber es nimmt ab, wenn $-x$ zunimmt: deswegen kann es für $x = -Aq$ die Fläche DEAqn nicht mehr ausdrücken, es muß vielmehr eine Fläche ausdrücken, die auf der andern Seite von qn liegt; und dieß ist keine andere, als FqnG, weil für $x = -$AF $= -a$ das Integral wieder verschwindet. Wenn $-x$ über $-$AF hinaus wächst, so wird das Integral wieder positiv, und wächst mit $-x$. Wenn also $x = -$AQ, so drückt das Integral die Fläche FQNG, keinesweges aber die Fläche DEAQN aus. Will man die Größe dieser letztern wissen, so muß man die drey Werthe DEA, AFG, FQNG ohne Absicht auf die Zeichen + oder − zusammen addiren. Denn es wäre doch wohl sehr sonderbar, wenn man DEAQN $= -$ ADE + AFG + FQNG $=$ FQNG setzen wollte. Ueberdem giebt die Integration nicht einmal diese Zeichen; sondern vielmehr − ADE, − AFG, und + FQNG. Aber das Zeichen − hat vor ADE eine andere Beziehung, als vor AFG. Die Integration giebt ADE negativ gegen DEMP, und AFG negativ gegen FQNG. Just eben die Bewandtniß hat es mit allen den hyperbolischen Flächen, davon beym Hrn. d'Alembert die Rede ist. (8 Fig.) Die Integration giebt AOPN sowohl, als AnpG negativ, aber jene Fläche in Absicht auf NPSR, und diese in Absicht auf $npsr$.

§. 11.

§. 11.

Ich habe gesagt, es habe eben dieselbe Bewandtniß mit allen den hyperbolischen Flächen, davon beym Hrn. d'Alenbert die Rede ist, das ist, mit den Flächen aller derjenigen Hyperbeln, welche die Gleichung $z = \frac{a^{2m+2}}{y^{2m+1}}$ ausdrückt. Ich habe dieß bereits aus der allgemeinen Formul des Integrals $\int zdy \; \frac{a^{2m+2}}{2m} (\frac{1}{b^{2m}} - \frac{1}{y^{2m}})$ hergeleitet, und es wird nicht undienlich seyn, über den Fall, wenn $m = o$, und die Hyperbel die Apollonianische ist, noch einige besondere Betrachtungen anzustellen. Nun wird $z = \frac{a^2}{y}$ und $\int zdy = \frac{1}{2}aa \frac{(\frac{yy}{bb})^0 - 1}{0}$ (§. 8.) $= \frac{1}{2} aa \; \infty \; ((\frac{yy}{bb})^{1:\infty} - 1)$. Vermöge des 15 und 18 §. der 1 Abtheilung ist der Ausdruck $\infty ((\frac{yy}{bb})^{1:\infty} - 1) = l \frac{yy}{bb}$ wenn l den natürlichen Logarithmen bedeutet. Also wird $\int zdy = \frac{1}{2} a^2 \; l \frac{yy}{bb}$. Dieß bestätiget nun alles dasjenige vollkommen, was ich von den Flächen der apollonianischen Hyperbel im 8 §. behauptet habe. Dieser Ausdruck ist positiv für positive y, so lange $y > b$, und wird negativ für $y < b$, er wird $-\infty$, wenn $y = o$, er bleibt noch negativ für negative y, die kleiner sind als b, nimmt aber ab, wenn $-y$ wächst, und verschwindet, für $y = -b$, da er dann für größere y wieder positiv wird, und mit ihnen wächst. Man kann eben das aus dem Ausdruck $\frac{1}{2} aa \infty ((\frac{yy}{bb})^{1:\infty} - 1)$ herleiten, wenn man sich vermittels der Reihe aus dem 15 §. der 1 Abtheilung davon versichert hat, daß dieser Ausdruck positiv sey, wenn y nur etwas weniges größer als b genommen wird, so daß $\frac{yy}{bb}$ nicht größer als 2, oder $y < b\sqrt{2}$ ist. In dieser Voraussetzung also, daß $y = f$, und $f < b\sqrt{2}$ sey, werde $(\frac{ff}{bb})^{1:\infty} = 1 + \frac{1}{\infty}\beta$, so wird sich β aus der angeführten Reihe bestimmen lassen.

Nun sey überhaupt $\frac{yy}{bb} = (\frac{ff}{bb})^r$, so wird $(\frac{yy}{bb})^{1:\infty} = (\frac{ff}{bb})^{r:\infty} = (1 + \frac{1}{\infty}\beta)^r$ $= 1 + \frac{1}{\infty} r\beta$. Also wird $\frac{1}{2} aa \infty ((\frac{ff}{bb})^{1:\infty} - 1) = \frac{1}{2} aa (\infty + \beta - \infty)$ $= \frac{1}{2} aa \beta$, und überhaupt $\frac{1}{2} aa \infty ((\frac{yy}{bb})^{1:\infty} - 1) = \frac{1}{2} aa r \beta$. So lange nun $y > b$ ist, muß r positiv seyn, und mit y wachsen, für $y = b$ aber verschwinden. Wenn $y < b$ wird, so muß r negativ seyn, und für $y = o$, muß r negativ unendlich werden. Für negative y bleibt Anfangs r negativ, so lange $y < b$ ist, nimmt aber ab, wenn y wächst, bis für $y = -b$, wiederum $r = o$ wird. Für größere negative y wächst r wieder positiv. Also hat es seine Richtigkeit, daß die Werthe für $m = o$ in dem Integral $\frac{a^{2m+2}}{2m}(\frac{1}{b^{2m}} - \frac{1}{y^{2m}})$ noch eben so abwechseln, wie in den Fällen, da m nicht $= o$, sondern einer bestimmten ganzen Zahl gleich ist. Ich habe dieß mit Fleiß besonders bewiesen, um den Gründen des Hrn. d'Alenbert alles mögliche Gewicht zu geben.

§. 12.

Man construire nämlich nunmehro nach Vorschrift des Hrn. d'Alenbert die Gleichung $dx = \frac{a^{2m+1}dy}{y^{2m+1}}$, oder $x = \frac{a^{2m+1}}{2mb^{2m}} - \frac{a^{2m+1}}{2my^{m2}}$, wo die Gleichheit der Abmessungen gehörig hergestellet ist; so fällt in die Augen, daß die Linie MNnm, (11 Fig.) welche diese Gleichung ausdrückt, die Hyperbel der Ordnung $2m+1$ sey, deren Asymtoten EF, CD sind, und worinn die Abscissenlinie mit der Asymtote EF in der Distanz CA $= \frac{a^{2m+1}}{2mb^{2m}}$ parallel liegt, der Anfangspunct der Abscissen aber im Durchschnitt A der Abscissenlinie mit der Asymtote CD genommen worden. Man kann hieraus diese Folge ziehen. Die Quadratrix einer jeden Hyperbel, deren Exponent der Ordnung eine gerade Zahl ist, aber so, daß die

Ordinate eine **einförmige** Function der Abscisse bleibet, sey die nächst niedrigere Hyperbel, die zum **Exponenten ihrer Ordnung**, die nächst kleinere ungrade Zahl hat. Man kann daraus ferner in einem richtigen Verstande schließen, die Quadratrix der Hyperbel der zweyten Ordnung sey eine Hyperbel der ersten Ordnung, und dann wird die Hyperbel der ersten Ordnung einerley mit der logarithmischen Linie seyn. So wie nun alle Hyperbeln ungrader Ordnungen aus zweyen gleichen ähnlichen, und gegen die mit den Ordinaten parallele Asymtote ähnlich liegenden Stücken bestehen; so wird dieß auch von der Hyperbel der ersten Ordnung, oder der logarithmischen Linie gelten. Alles wird in sein völliges Licht gesetzt, wenn man den besondern Fall, wenn $m = o$ ist, gehörig entwickelt. In diesem Fall wird die beständige Größe $\frac{a^{2m+1}}{2mb^{2m}} = AC = PR$ unendlich. Also behält die Linie eigentlich nur die eine Asymtote CD. Ferner drückt in der allgemeinen Gleichung $x = \frac{a^{2m+1}}{2mb^{2m}} - \frac{a^{2m+1}}{2my^{2m}}$ der veränderliche Theil das Stück PM aus, welches gleichfalls unendlich wird, so daß nunmehro die Ordinate RM, die Differenz zweyer unendlichen Größen RP, und PM wird, wie die Gleichung richtig angiebt. Uebrigens erhellet, 1) daß x zweymal $= o$ werde, nämlich für $y = + b = +$ AN, und für $y = - b = An$; 2) daß x einmal negativ unendlich werde, für $y = o$, und 3) daß x zweymal positiv unendlich werde, für $y = + \infty$, und $y = - \infty$. Zwischen den Gränzen $y = + b$, und $y = + \infty$ wächst x von o bis ∞, zwischen den Gränzen $y = + b$ und $y = o$ ist x negativ und wächst bis zu ∞; zwischen den Gränzen $y = o$, und $y = - b$ bleibt x negativ, und nimmt ab bis zur o; endlich zwischen den Gränzen $y = - b$, und $y = - \infty$ wird x wieder positiv und wächst bis $+ \infty$. Vermöge dieser Verzeichnung ergeben sich nun ohne Zweifel zwey gleiche und ähnliche Stücke der logarithmischen Linie, nämlich VN*m* und *vnm*. Jede positive Abscisse

AR hat mit der ihr gleichen und entgegengesetzten negativen Ar eine gleiche Ordinate RN $= rn$. So weit ist an allen diesen Schlüssen nichts auszusetzen, und man kann ohne Bedenken zugeben, daß die logarithmische Linie, wenn sie als die Quadratrix der Hyperbel angesehen wird, und ihre Ordinaten den möglichen Flächen der Hyperbel auf beyden Seiten proportional seyn sollen, einen Durchmesser habe, oder aus zweyen gleichen und ähnlichen Stücken bestehe. Sobald man aber weiter schließt, wenn $AN = 1$; so ist $RM = l\,AR$, und $rm = l - Ar = l + AR = RM$, also hat $-Ar$ eben den Logarithmen, welchen $+AR$ hat, und so weiter; so läugne ich diese fernere Folge. Vermöge der Verzeichnung ist freylich $RM = l\,AR$, wenn $AN = r$ ist, oder eigentlich $RM = l\,\frac{AR}{1}$; aber es ist keinesweges $rm = l\,\frac{Ar}{+1}$; es ist vielmehr $rm = l\,\frac{Ar}{An} = l\,\frac{-AR}{-1}$, denn diese Ordinate ist der Fläche $npsr$ (8 Fig.) proportional, und diese Fläche ist $= l\,\frac{-AR}{-1}$ (§. 8.) und keinesweges $= l\,\frac{-RA}{+1}$

§. 13.

Die Gleichung dieser Linie wird nun diese seyn: $x = \frac{1}{2} a\, l\,\frac{yy}{bb}$, und es bedeutet hier x die Ordinate, und y die Abscisse. Wenn man aber MQ mit AR parallel ziehet, so wird $x = RM = AQ$ und $y = AR = QM$. Nimmt man also die Abscissen AQ, auf der Asymtote, und die Ordinaten MQ auf derselben perendiculär, so dienet eben die Gleichung, nur mit dem Unterscheid, daß die Bedeutung der Buchstaben x und y sich verwechselt, und x die Abscisse, y aber die Ordinate anzeigt. Wenn nun c die Basis der natürlichen Logarithmen ist, so giebt die Gleichung $x = \frac{1}{2} a\, l\,\frac{yy}{bb}$ auch diese $e^{2x:a} = \frac{yy}{bb}$, und es wird $y = \pm b\, e^{x:a}$, so daß jeder Abscisse x zwey gleiche und entgegengesetzte y zugehören. Nun sind die Abscissen die Logarithmen der Ordinaten. Man kann zugeben,

daß

daß die Abscissen auch die Logarithmen der negativen Ordinaten sind. Aber so, wie die Abscissen eigentlich die Logarithmen der Verhältnisse der positiven Ordinaten gegeneinander sind; so sind sie zugleich die Logarithmen der Verhältnisse der negativen Ordinaten gegeneinander. So wie nun $AQ = l\frac{QM}{AN}$ ist, so ist zugleich $AQ = l\frac{Qm}{An} = l\frac{-QM}{-AN}$, aber keinesweges $AQ = l\frac{-QM}{+AN}$. Man kann demnach der logarithmischen Linie zwey Aeste lassen, man kann zugeben, daß sie einen Durchmesser habe: inzwischen behalten die Hrn. von Leibnitz und Euler noch immer recht, wann sie es läugnen, daß diese Linie einen Durchmesser habe. Denn sie haben es in einem andern Verstande geläugnet, als es hier erwiesen ist. Gemeiniglich wird die Gleichung für die logarithmische Linie so ausgedrückt $x = a\,l\frac{y}{b}$, oder $e^{x:a} = \frac{y}{b}$, und es ist offenbar, daß diese Gleichung nur einen Ast allein ausdrücken könne, deswegen würde die Frage seyn, welche Gleichung man nehmen müsse? Es ist nun nicht schwer, hierauf zu antworten, und es in sein gehöriges Licht zu setzen, worauf die ganze Streitigkeit von der Gestalt der logarithmischen Linie ankomme. Gegen die Folge des Satzes: wenn alle die Linien, welche die Gleichung $dx = \frac{dy}{y^{2m+1}}$ ausdrückt, einen Durchmesser haben, so muß dieser Durchmesser noch bleiben, wenn $m = o$ ist, hatte Hr. Euler in den Memoires de Berlin das Nöthige schon erinnert. Man ist nur so lange davon versichert, daß alle diese Linien einen Durchmesser haben, als diese Gleichung algebraisch integrabel ist. Aber das Integral bleibt nicht algebraisch, wenn $m = o$ ist, also kann man auch nicht versichert seyn, daß der Durchmesser bleibe. Um desto überzeugender darzuthun, daß dergleichen Sätze, so allgemein sie scheinen möchten, dennoch in speciellen Fällen zuweilen Ausnahmen leiden, führt er die Gleichung zum Exem. an $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(b+x)}$. Alle Linien, welche diese Gleichung ausdrückt, sind algebraisch

gebraisch und haben einen Durchmesser; dennoch aber behält die Linie keinen Durchmesser mehr, wenn $b = o$ ist. Hierauf antwortet Hr. d'Alenbert, das habe zwar seine Richtigkeit, aber es rühre eigentlich daher, weil in dem Fall die Gleichung des achten Grades, welche $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(b+x)}$ giebt, sich in zwey rationale Gleichungen der vierten Ordnung theile, und also in der That zwey unterschiedene Linien ausdrücke, die für einerley Axe und Anfangspunct der Abscisse beschrieben worden. Hierauf erwiedere ich nun, daß just derselbe Fall Statt habe, wenn von der Gleichung $x = \frac{a^{2m+1}}{2m}\left(\frac{1}{b^{2m}} - \frac{1}{y^{2m}}\right)$ die Rede ist. Wenn $m = o$ ist, so wird daraus $\frac{2x}{a} = l\frac{yy}{bb}$, oder $e^{2x:a} = \frac{yy}{bb}$. Jene theilt sich in die beyden Gleichungen $\frac{x}{a} = l\frac{y}{b}$ und $\frac{x}{a} = l\frac{-y}{-b}$, und diese in die beyden Gleichungen $e^{x:a} = \frac{y}{b}$ und $e^{x:a} = \frac{-y}{-b}$; also gehören die beyden Aeste der logarithmischen Linie, welche die allgemeine Gleichung giebt, eigentlich nicht weiter zusammen, als ein paar Linien, die für einerley Axe und Anfangspunct der Abscissen beschrieben sind. Beyde Aeste drücken auch keine verschiedene Logarithmensysteme aus, sondern der eine Ast drückt gerade dasselbe System aus, was der andere ausdrückt. In der That hat es also damit eben die Bewandtniß, wie mit der Gleichung $yy = nnxx$, welche ein System zweyer gegen die gemeinschaftliche Axe auf beyden Seiten ähnlich liegender geraden Linien giebt. Wer wollte aber hieraus die Folge ziehen, daß zu einer jeden geraden Linie eine andere gehöre, die auf der andern Seite gegen die Axe eine ähnliche Lage hat. Inzwischen kömmt man doch oft bey Auflösung einer Aufgabe auf diese Gleichung, da es denn ein Beweis ist, daß zur vollständigen Verzeichnung zwey grade Linien erfordert werden, wie wenn man die Gleichung für den Schnitt eines senkrechten Kegels sucht, der durch die Axe gehet. Ein und eben derselbe Logarithme gehöret nicht nur dem Verhältnisse $\frac{y}{b}$, sondern auch dem

Ver-

Verhältnisse $\frac{-y}{-b}$ zu. Weder die Gleichung $x = l\frac{y}{b}$, noch die Gleichung $x = l\frac{-y}{-b}$ kann beydes zugleich ausdrücken; will man eine Gleichung haben, die beydes zugleich ausdrückt, so muß man beyde zusammen addiren, oder welches einerley ist die Gleichungen $e^{x:a} = \frac{y}{b}$ und $e^{x:a} = \frac{-y}{-b}$ in einander multipliciren. Bey obiger Art, die Hyperbel zu quadriren, enthielte das Integral die Logarithmen der Verhältnisse der positiven Abscissen zur positiven Einheit sowohl, als der negativen Abscissen zur negativen Einheit. Also mußte eine Gleichung heraus kommen, die beydes ausdrückte, und die Quadratrix mußte aus zweyen Stücken bestehen, so wie der Kegelschnitt durch die Axe des Kegels aus zweyen graden Linien.

§. 14.

Hr. d'Alenbert braucht noch verschiedene andere Gründe zu beweisen, daß die logarithmische Linie einen Durchmesser haben müsse. Auf der 191 und 192 Seite der Opuscules, finde ich folgende Schlüsse: Die Gleichung $y = c^x$ giebt für unzählige Werthe von x einen doppelten Werth von y, allemal nämlich, wenn $x = \frac{n}{2m}$ ist; also hat die logarithmische Linie auf der andern Seite der Axe wenigstens unzählige puncta discreta. Dieß geben auch wohl andere Geometer zu, die sonst auf des Herrn von Leibnitz Seite sind. Ich muß aber die Richtigkeit desselben läugnen, weil c^x keine andere, als positive Werthe haben kann, was auch x bedeutet, (1 Abth. §. 31.) daferne es nur eine mögliche Größe ist, wie an dem angeführten Ort vorausgesetzt wird. Hr. d'Alenbert gehet noch weiter und behauptet, daß diese puncta discreta eine stätige Linie ausmachen. Denn sagt er, man muß voraussetzen, daß c einen doppelten Werth habe, einen positiven und einen negativen, und dieß deswegen, weil c die Zahl ist, deren Logarithmen $= 1$ und nach seinem System jedem Logarithmen zwey gleiche

und entgegengesetzte Zahlen zugehören. Dieser letzte Satz ist, wie ich glaube, hinlänglich widerlegt, also fällt der ganze Beweis für den doppelten Werth von c weg. Ueberdem ist die Voraussetzung dieses doppelten Werths von c deswegen unrichtig, weil ein Logarithmensystem, dessen Basis $= - c$ seyn soll, von demjenigen dessen Basis $= + c$ ist, so gewiß unterschieden seyn muß, als ein System, dessen Basis $= 10$, unterschieden ist von demjenigen, dessen Basis $= 8$, oder einer andern von 10 unterschiedenen Zahl. Ferner ist diese Voraussetzung wider alle Begriffe der in den analytischen Gleichungen vorkommenden beständigen Größen. Diese müssen **ganz bestimmt** seyn, sowohl in Ansehung **der Größe**, als auch in Ansehung **der Lage**, ehe und bevor man die Linie, welche die Gleichung ausdrückt, verzeichnen kann. Man könnte sonst auf eben die Art allerhand sonderbare Sätze heraus bringen. Wenn Hr. d'Alenbert behauptet, es habe mit der Gleichung $y = c^x$ eben die Bewandtniß, wie mit der Gleichung $y = \sqrt{x}$ für die Parabel; so muß ich aufrichtig gestehen, daß ich dieß gar nicht verstehen könne, wie es eigentlich gemeynet sey. Diese Gleichung muß deswegen quadrirt werden, weil sie irrational ist. Das ist die Ursache, warum weder $y = + \sqrt{x}$, noch $y = - \sqrt{x}$ die Parabel ganz ausdrückt, sondern vielmehr die Gleichung $yy = x$. Hier muß also die auf die Potenz $\frac{1}{2}$ schon erhöhete Größe nämlich $x^{1:2}$ beyde Zeichen haben. Aber Hr. d'Alenbert wollte beweisen, daß c, die Größe unter dem Exponenten beyde Zeichen haben müsse. Wie das nun aus dem angebrachten Exempel der Parabel folge, weis ich nicht.

§. 15.

Mit dem vorigen Beweise verbindet Herr d'Alenbert an eben der Stelle noch einen andern. (12 Fig.) Er sagt so: man nehme auf der Axe der logarithmischen Linie, einen Punct Q nach

Be-

Belieben, schneide auf der Axe zwey gleiche Stücke AQ, QP ab, und ziehe die Ordinaten AB, PM; so ist die Ordinate in Q zwischen AB und PM die mittlere Proportionallinie, welche allemal einen doppelten Werth hat, QS und QR = — QS, u. s. f. In der That ist dieß eben das, was die Gleichung $c^{2x:a} = \frac{yy}{bb}$ ausdrückt, und Hr. d'Alenbert hätte hieraus eben diese Gleichung herleiten können. Inzwischen bleibt dieser Grund für sich allein allemal unzulänglich, weil man sonst auf eben die Art beweisen könnte, daß jede Linie, wenn gleich in ihrer Gleichung die Ordinate y eine rationale ganze Function von der Abscisse x ist, dennoch aus zweyen gleichen und ähnlichen Stücken bestehen müsse, indem es eben so viel ist, als ob man die Gleichung quadrirte. So ist z. E. $y = nxx$ die Gleichung einer Parabel ASM, (13 Fig.) von der sich eben so beweisen läßt, daß jeder Abscisse AQ zwey gleiche entgegengesetzte Ordinaten QS und QR zugehören. Man nehme nämlich einen Punct D nach Gefallen zwischen A und Q, und P so, daß $AD^2 : AQ^2 = AQ^2 : AP^2$ wird, und ziehe die Ordinaten DE und PM, so ist nun die Ordinate in Q zwischen DE und RM die mittlere Proportionallinie, welche einen doppelten Werth haben muß, QS und QR = — QS. Man kann die Gleichung leicht so einrichten, daß sie diesen Umstand ausdrückt. Es sey nämlich $AQ = x$, und $QS = y$, so ist $DE = n\ AD^2$ und $PM = n\ AP^2$, folglich $DE . PM = nn\ AD^2 . AP^2$; das ist aber eben so viel, als $QS^2 = nn\ AQ^4$ oder überhaupt $yy = nn\,x^4$. So wenig diese Schlüsse beweisen können, daß die Parabel auf beyden Seiten der Abscissenlinie AP gleiche und ähnliche Stücke habe; eben so wenig können es jene Schlüsse des Hrn. d'Alenbert von der logarithmischen Linie darthun. Würde man inzwischen bey Auflösung einer Aufgabe auf jene Gleichung $yy = nn\,x^4$ geleitet; so würden beyde Parabeln deswegen, weil sie den sogenannten Ort der Aufgabe ausmachen, zusammen gehören. Hievon ist die An-

 wen-

wendung leicht auf die logarithmische Linie zu machen. Ihre Gleichung $e^{x:a} = \frac{y}{b}$ ist für sich schon rational, und deswegen ist es nicht verstattet sie zu quadriren, wofern es nicht wegen andrer Gründe geschehen muß. Diese sind aber vorhanden, wenn man sie als die Quadratricem der Hyperbel ansiehet, welche die **möglichen** Flächen der Hyperbel auf beyden Seiten ausdrücken soll.

§. 16.

Gegen diese bisher von mir beurtheilte Lehre, von den beyden gleichen und ähnlichen Stücken der logarithmischen Linie, macht sich Hr. d'Alenbert auf der 222 Seite folgenden Zweifel. On pourroit faire contre l'argument tiré des aires hyperboliques une objection que voici, & qui paroit avoir echappé à tous ceux, qui ont jusqu'ici traité cette matiére. Soit AP $= x$, PM $= y$, AC $= a$, & $y = \frac{1}{(a-x)^n}$ n etant un nombre pair positiv; il est visible, que cette équation sera celle d'une hyperbole du degré n, qui aura pour asymtote CO, & dont les deux branches BMQ, qmb, seront du même coté de l'Axe Aa. Il est visible de plus, que l'integrale de ydx, ou l'aire ABMP $= \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(a-x)^n} - 1 - \frac{1}{a^n}\right)$; & comme les deux branches BMQ, qmb, appartiennent à une seule & même courbe, il semble, que cette integrale devroit exprimer aussi l'aire AQ qmp, dans laquelle Ap est $>$ AC. *Cependent elle ne l'exprime pas.* Car quand x est $> a$, l'integrale précédente est toujours finie, au lieu, que laire AQ qmp est infinie, étant composée des deux aires infinies ABQC, qmpc. Voila donc un exemple ou l'équation des aires n'est pas assujettie à la loi de continuité, quoique celle des branches le soit. Or dira-t-on, ne pourroit-il pas en être de même de l'hyperbole équilateré? Ich merke hiebey an, daß in dem Ausdruck des Integrals APMP $= \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{(a-x)^{n-1}} - \frac{1}{a^n}\right)$ ohne Zweifel ein Druckfehler eingeschli-

chen

chen sey, und daß es $\frac{1}{a^{n-1}}$ statt $\frac{1}{a^n}$ heißen müsse. Es ist nämlich $\int\frac{dx}{(a-x)^n}=\frac{1}{(n-1)(a-x)^{n-1}}+C$, und dieß Integral soll $=0$ seyn, für $x=0$. Also wird $C=-\frac{1}{(n-1)a^{n-1}}$, und $\int ydx=\frac{1}{n-1}(\frac{1}{(a-x)^{n-1}}-\frac{1}{a^{n-1}})$. Da n hier eine grade Zahl bedeutet, so will ich wegen mehrerer Deutlichkeit $2m$ statt n schreiben; so wird $\int ydx=\frac{1}{2m-1}(\frac{1}{(a-x)^{2m-1}}-\frac{1}{a^{2m-1}})$. Diese Gleichung soll, wie Herr d'Alenbert glaubt, für $x>a$ nicht mehr gelten, und zwar aus dem Grunde, weil dieß Integral für $x>a$ allemal unendlich, die Fläche AQqmp aber, die es in diesem Fall ausdrücken sollte, allemal unendlich groß ist. Aber warum kann man nicht hier auch sagen, es sey AQqmp = ABMP + PMQC — pmQC = ABMP + PMQC — PMQC = ABMP, da in einem unstreitig richtigen Verstande die Fläche pmQC = — PMQC ist? Hr. d'Alenbert drückt sich hier so aus: **Die Gleichung der Flächen sey dem Gesetz der Stätigkeit nicht unterworfen**, und es kommt hiebey also darauf an, daß der Sinn der Redensart, **eine Integralgleichung sey dem Gesetz der Stätigkeit unterworfen** festgesetzt werde. Will man dieß so erklären, eine Gleichung von dieser Art, wenn sie die Quadratur einer Linie ausdrückt, sey alsdann nur dem Gesetz der Stätigkeit unterworfen, wenn das Integaal für jeden möglichen Werth der Absciße x die zwischen denjenigen Ordinaten enthaltene Fläche ausdrückt, davon die eine bey Hinzusetzung der beständigen Größe bestimmt worden, die andere aber durch den Endpunct der Absciße gehet; so muß man zugeben, daß obige Gleichung für die Quadratur der Hyperbel $\int ydx=\frac{1}{2m-1}(\frac{1}{(a-x^{2m-1}}-\frac{1}{a^{2m-1}})$ dem Gesetz der Stätigkeit nicht unterworfen sey. Aber alsdann ist auch die Gleichung $\int ydx=\frac{1}{2m}(\frac{1}{(a-x)^{2m}}-\frac{1}{a^{2m}})$ diesem Gesetz nicht unterworfen, wenn $y=\frac{1}{(a-x)^{2m+1}}$ ist. Denn diese der

Hyperbel MPVmpF (8 Fig.) zugehörige Gleichung, wenn nämlich die Abscissen von N gerechnet werden, und NA $= a$ ist, drückt für $x =$ N$r > a$ ebenfalls die zwischen PN und rs enthaltene Fläche nicht aus. Wofern dieß also ein Beweis seyn soll, daß die Integralgleichung gar keine zu eben der Linie gehörige Flächen mehr ausdrücken könne, wenn $x > a$ ist; so widerspricht Hr. d'Alenbert seinem eigenen System von den beyden gleichen und ähnlichen Stücken der logarithmischen Linie, denn es hat in der That mit beyden Gleichungen einerley Bewandtniß.

§. 17.

Meine Gedanken von der Sache sind diese. Das Gesetz der Stätigkeit erfordert nur, daß das Integral jedesmal eine zwischen zweyen parallelen Ordinaten enthaltene Fläche ausdrücke. Die übrigen Umstände müssen es ergeben, welche Ordinaten diejenigen sind, zwischen denen die Fläche jedesmal fällt. Der Ausdruck ydx giebt nicht allein das Differential der Fläche zwischen AB und PM (14 Fig.); sondern es ist zugleich ydx das Differential einer Fläche, die auf der andern Seite von PM liegt, und um das Differential ydx abnimmt, wenn ABPM um dieses Differential anwächst. Das ist die Ursache, warum das Integral $\int ydx$ sowohl die eine, als die andere dieser Flächen ausdrücken kann, und es ergiebt sich in jedem besondern Fall ohne Schwierigkeit, welche von diesen beyden Flächen verstanden werden müsse. Wenn in der Gleichung $\int ydx = \frac{1}{2m-1} \left(\frac{1}{(a-x)^{2m-1}} - \frac{1}{a^{2m-1}}\right)$ die Abscisse $x > a$ genommen wird, so ist dieß Integral negativ, und nimmt ab, wenn x wächst. Dieß ist ein Beweis, daß die dadurch ausgedrückte Fläche auf der andern Seite von pm falle, welche der vorigen entgegen gesetzt ist. Man nehme an, die Axe der Abscissen sey auf beyden Seiten nach S und s bis ins Unendliche verlängert, und zugleich die beyden zugehörigen Aeste der krum-

men

men Linie nach V und v; so erhellet, daß die Fläche $pmvs$ abnehme, wenn x wächst, so wie es der Ausdruck des Integrals erfordert. Für $x = \infty$, wird das Integral $= -\frac{1}{(2m-1)a^{2m-1}}$. Für $x = -\infty$ behält das Integral denselben Werth, da es die Fläche ABVS ausdrückt, dieß erhellet daraus, weil es noch weiter abnimmt, wenn $-x$ kleiner wird. So drückt es für $x = -$ AR die Fläche ABNR aus, so lange bis $x = o$ ist, da dann das Integral wieder verschwindet. Diesemnach drückt das Integral, wenn $x > a$ genommen wird, die Flächen $pmvs$ und VSAB zusammen genommen aus. So sonderbar dieß scheinen möchte, so gewiß ist es, daß es damit seine völlige Richtigkeit habe, und daß es eben hiedurch völlig einleuchte, wie die Flächen auf beyden Seiten durch einerley Integralformul ausgedrückt werden, oder wie Hr. d'Alenbert redet, nach dem Gesetz der Stätigkeit zusammen hängen. Das anscheinende sonderbare rühret blos von der Voraussetzung her, die man bey der Addition der beständigen Größe angenommen hat. Es kann nämlich die beständige Größe $-\frac{1}{a^{2m-1}}$ nicht hinzu kommen, wofern man nicht voraussetzt, daß das Integral $= o$ seyn soll, wenn $x = o$ ist. Aber die natürlichste Voraussetzung ist, das Integral $= o$ zu setzen, wenn $x = \infty$ ist, da dann die beständige Größe $= o$, und das Integral $\int ydx = \frac{1}{(2m-1)(a-x)^{2m-1}}$ wird. Nun drückt es für $x > a$ die Fläche $pmvs$ aus, und das Integral ist zwischen den Gränzen $x = a$, und $x = + \infty$, negativ. Wird aber x negativ, so wird das Integral positiv, und drückt z. E. für $x = -$ AR die Fläche VSRN aus, welche wächst, wenn AR abnimmt, so wie es das Integral verlangt; für $x = o$ ist das Integral $= \frac{1}{(2m-1)a^{2m-1}}$, welches die Fläche VSAB ausdrückt. Wird x positiv, so wächst diese Fläche noch über VSAB hinaus, bis sie für $x = a$ unendlich, und für $x > a$

wie-

wieder negativ wird. Durch die Voraussetzung also, daß das Integral $= 0$ seyn soll, wenn $x = 0$ ist, vermindert man die ganze Reihe der positiven Flächen um das Stück VSAB. Wenn aber eine positive veränderliche Größe mit einer andern negativen nach dem Gesetz der Stätigkeit zusammen hängt, und 0 die Gränze zwischen beyden ist, so kann man die positive Größe, nicht um ein gewisses Stück vermindern, daß man nicht die damit zusammen hängende negative um eben dieses Stück vermehren sollte. Vermindert man die positiven Abscissen einer krummen Linie um die beständige Größe b dadurch, daß man den Anfangspunct der Abscissen um die Distanz b vorwärts rückt; so werden zugleich alle negative Abscissen um eben dieses Stück vermehret. Vermindert man die positiven Ordinaten dadurch, daß man mit der vorigen Abscissenlinie eine andere in der Distanz b parallel legt, so werden zugleich alle negative Ordinaten um eben dieses Stück vergrößert. Dieser Umstand hat nur alsdann Statt, wenn die positiven Werthe mit den negativen nach dem Gesetz der Stätigkeit zusammen hängen. Also giebt er in dem obigen Fall einen Beweis ab, daß wirklich die Flächen VSPM und $vspm$ nach dem Gesetz der Stätigkeit verbunden sind. Wenn man $dz = \frac{dx}{(a-x)^{2m}}$ setzt, und diese Gleichung construirt, oder welches einerley ist, die Quadratricem der Hyperbel $y = \frac{1}{(a-x)^{2m}}$ verzeichnet, so wird dieß alles dadurch vollständig erläutert. Allein ich enthalte mich darüber weitläuftiger zu seyn, da dieß in der That bekannte Dinge sind.

§. 18.

Ich glaube nunmehro, daß die Schwäche des Hauptbeweises, womit Herr d'Alenbert gegen dem Hrn. von Leibnitz die Mög-

Möglichkeit der Logarithmen verneinter Größen, hat erhärten wollen, völlig ins Licht gesetzet sey. Ob dieses gleich hinlänglich ist, das ganze System des Hrn. d'Alenberts von den Logarithmen verneinter Größen zu widerlegen; so wird es doch nicht undienlich seyn, auch die vornehmsten von denjenigen Gründen, welche Hr. d'Alenbert insbesondere dem Hrn. Euler entgegen gesetzt hat, zu prüfen. Ich habe schon im 2 §. angeführet, daß Hr. Bernoulli unter andern diesen Beweis gebraucht habe: weil $\frac{-dx}{-dx} = \frac{+dx}{+dx}$, so sey $l - x = l + x$. Hierauf antwortet Hr. Euler mit Recht, man könne aus der Gleichheit der Differentiale auf die Gleichheit der Integrale nicht schließen, weil die Integrale um eine beständige Größe unterschieden seyn können, die bey der Differentiation wegfällt. So ist hier wirklich $l - x = lx + l - 1$, woraus es ganz deutlich erhellet, warum $dl - x = dl + x$ werde, ohne daß deswegen $l - x = l + x$ sey, wofern man nicht schon voraussetzt, daß $l - 1 = 0$ sey, welches doch erst bewiesen werden soll. Man könnte also auf eben die Art beweisen, daß $lnx = lx$ sey, weil $d. lnx = \frac{ndx}{nx} = \frac{dx}{x} = dlx$; ein Satz von dem Hr. Euler sagt, daß ihn Hr. Bernoulli selbst ohne Zweifel für falsch erklären würde, und den ja wohl ein Jeder für falsch erklären muß. Inzwischen thut es Hr. d'Alenbert nicht, sondern er sagt ausdrücklich: je ne vois pas ce que cette conséquence avoit de choquant. So wie sich Hr. d'Alenbert aber darüber erklärt, hat freylich der Satz $lnx = lx$ nichts anstößiges, wenn nämlich von **verschiedenen** Systemen die Rede ist. Aber in einem und eben demselben System kann doch wohl unmöglich $lnx = lx$ seyn, und dieß ist es, was aus der obgedachten Art zu schließen folgen würde. Es ist d. log. naturalis $nx = \frac{ndx}{nx}$ und d. log. nat. $x = \frac{dx}{x}$, also würde log. naturalis nx = log. nat. x seyn, und dieß ist es, dessen Unmöglichkeit Hr. Euler behauptet. Hr. d'Alenbert selbst will ja auch nebst dem Hrn.

Bernoulli auf diese Art beweisen, es sey log. nat. $-x =$ log. nat. $+x$. Doch ich muß auch dasjenige nicht verschweigen, was Hr. d'Alenbert beybringt, um dieses alles zu rechtfertigen. En effet (so heißt es auf der 194 Seite) qu'est-ce que lx en regardant x comme l'ordonnée d'une Logarithmique? c'est *le logarithme du rapport* de x à une ordonnée b, que l'on prend pour unité (Hr. d'Alenbert nimmt also an dieser Stelle selbst den Begriff eines Logarithmen so an, wie ich ihn im 13 §. der 1 Abth. gebildet habe.) Qu'est ce que lnx? C'est en general le logarithme du rapport de nx à une ligne quelconque c, que l'on prend pour l'unité. Si on fait $c = b$ on trouvera aisément, que log. $\frac{nx}{c} = l\frac{x}{b} + l\frac{nx}{b}$, ou $lnx = lx + ln$; mais si on fait $c = nb$, on aura $l\frac{nx}{nb} = l\frac{x}{b} = lx$. En general il est évident, que si on prend ln pour zero, ou ce qui revient au même, si on prend n pour representer l'unité, lnx sera égal au logarithme de x. Pourquoi donc en prenant -1 pour representer l'unité, c'est a dire, pour le nombre dont le log. $= 0$, n'auroit-on pas $lnx = l{-x} = lx$? Entweder die bisherige Theorie von den Logarithmen muß ganz umgearbeitet werden, oder alles dieses will nichts weiter sagen, als so viel: Die Logarithmen sind gleich, wenn die Verhältnisse gleich sind, und es heißt $l{-x} = l+x$ nach der eigenen Erklärung des Hrn. d'Alenberts, die an dieser Stelle wenigstens sehr deutlich angetroffen wird, nichts anders, als $l\frac{-x}{-1} = l\frac{+x}{+1}$. Hr. d'Alenbert giebt nämlich zu, daß lnx nicht $= lx$ seyn könne, wenn die Einheiten einerley sind, womit man x und nx vergleicht. Dagegen sagt er, wenn die Einheit, womit x verglichen wird $= b$, diejenige aber, womit man nx vergleicht $= nb$ genommen werde, so sey $lx = lnx$; das heißt nach seiner eigenen Erklärung $l\frac{nx}{n} = l\frac{x}{1}$. Hierauf folgt nun der Zusatz: wenn also $n = -1$, oder -1 selbst die Einheit ist, womit man

nx, so nun $-x$ ist, vergleicht, warum sollte nicht $lnx = l-x = lx$ seyn? demnach kann diese Frage nichts anders, als so viel sagen wollen: Warum sollte nicht $l\frac{nx}{x} = l\frac{-x}{-1} = l\frac{x}{1}$ seyn? das hat Niemand bestritten, und es wird nie bestritten werden.

§. 19.

Hr. Euler hatte gesagt, wenn man die Gleichung $lnx = lx$ gelten lasse, so bestehe die logarithmische Linie nicht aus zweyen, sondern unzählig vielen Stücken. Auch diese Folge läugnet Hr. d'Alenbert, und zwar setzt er die Ursache hinzu: wenn man $lnx = lx$ setze, so verrücke man nur den Anfangspunct der Abscissen. Allein so viel ich einsahe, wird hiedurch der Sinn der Streitfrage wiederum von Hrn. d'Alenbert ganz verändert. Bey ihm ist lnx so viel als $l\frac{nx}{n}$; wenn nun in der logarithmischen Linie BMN, die Ordinate PM $= x$, AB $= 1$, (12 Fig.) und also AP $= lx$ ist; wenn ferner LN $= nx$ und GH $= n$ ist, so ist freylich GL $=$ AP $= l\frac{LN}{GH} = l\frac{nx}{n}$, und also AP $= lnx - ln$ oder AP $+ ln = lnx =$ GL $+ ln$. Will man also nunmehro wieder x statt nx schreiben, und die Gleichung GL $+ ln = lx$ statt der vorigen AP $= ln$ nehmen, so heißt dieß freylich nur, den Anfangspunct der Abscissen von A nach G rücken. Aber beym Hr. Euler heißt lnx nicht so viel als $l\frac{nx}{n}$, sondern vielmehr so viel als $l\frac{nx}{1}$, wo eben diejenige Einheit verstanden werden muß, womit man x vergleicht. Wäre nämlich der Schluß richtig $\frac{-dx}{-x} = \frac{+dx}{+x}$, also $l-x = l+x$, so müßte man auch schließen können, $\frac{ndx}{nx} = \frac{dx}{x}$, also $lnx = lx$, was auch n bedeutet. Es kann demnach n jede Linie bedeuten, die von derjenigen unterschieden ist, welche man $= 1$ gesetzt hat: und wenn dieß ist, so wird die Gleichung AP $= lnx$ für jede Abscisse unzählig viele Ordinaten geben, und also die Linie unstreitig unzäh-

lig viele verschiedene Aeste bekommen. Uebrigens ist es eine allgemein bekannte Sache, daß zwar eine und eben dieselbe logarithmische Linie unzählig viele Logarithmensysteme ausdrücken könne, aber dieß aus keiner andern Ursache, als weil man bey der ersten Voraussetzung die Freyheit hat, die Subtangente, oder welches auf eins hinaus läuft, den Logarithmen eines angenommenen Verhältnisses durch jede beliebige Zahl auszudrücken. Es ist aber auch ferner ausgemacht, daß sich das System sogleich ändere, wenn man die Subtangente, oder auch den Logarithmen eben desselben Verhältnisses, durch eine andere Zahl ausdrückt. Wenn also in dem ersten System $\lambda = l\frac{x}{1}$ gewesen, so kann in dem zweyten $\lambda = l\frac{nx}{1}$ seyn. Aber sodann ist in dem zweyten nicht mehr $\lambda = l\frac{x}{1}$, wofern man nicht glauben will, es könne z. Ex. im briggischen System $l10 = l2x10 = l3x10 = l4x10$ u. s. f. seyn. Es sey also in dem zweyten System $L = l\frac{x}{1}$ die Basis des ersten e, die Basis des zweyten b, so wird $l^{\lambda} = x$, und $b^{L} = x$. Wenn nun $b = e^{\mu}$, so wird $e^{\lambda} = e^{\mu L}$, folglich $\lambda = \mu L$, oder $L = \frac{\lambda}{\mu}$; und der Modulus des zweyten Systems $= \frac{1}{\mu}$, wenn der Modulus des ersten $= 1$ ist. Alles dieses sind ganz bekannte und unläugbare Sätze: also wird der Satz, daß $lx = lnx$ seyn könne, wenn man ihn so erklärt, wie ihn ein Jeder natürlicher Weise verstehen wird, nur zuzugeben seyn, wenn von verschiedenen Systemen die Rede ist. Es scheint, daß Hr. d'Alenbert dieß auch endlich selbst eingestehe. Er setzt aber hinzu, wenn gleich zugegeben würde, daß die Voraussetzung $lnx = lx$ nur von verschiedenen Systemen gelte, so würde doch nicht folgen, daß auch dieß noch bey der Voraussetzung $l{-}x = l{+}x$ wahr sey: denn er habe das Gegentheil bewiesen. Daß dieß geschehen sey, muß ich vermöge des Vorigen läugnen. Hr. d'Alenbert hat nichts weniger bewiesen,

als

als daß $l\frac{-x}{+1} = l\frac{+x}{+1}$, wohl aber, daß $l\frac{-x}{-1} = l\frac{+x}{+1}$ sey, und das ist es gar nicht, worauf hier die Sache ankommt.

§. 20.

Wenn Hr. Bernoulli behauptet hatte, es sey $l-1 = l+1 = 0$, so folgert Hr. Euler daraus, es müsse demnach auch $l\sqrt{-1} = 0$, $l\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = 0$ seyn u. s. f., womit aber, die sonst bekannten Lehren von den unmöglichen Größen nicht bestehen können. Hr. d'Alembert findet auch in diesen Folgen nichts ungereimtes. Er sagt auf der 195 S. En effet tout systéme de Logarithmes est arbitraire en soi; & il est clair, que *o*, *o*, *o*, *o*, &c. formant une progression Arithmetique, je puis audessus d'une progression Géométrique quelconque imaginer une suite de zeros, qui seront chacun les logar. du nombre qui leur répond. Ainsi posant *o* pour le Logarithme de 1 & de -- 1. j'aurai *o* pour le Logarithme de $\sqrt{-1}$ & de $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. Aber heißt das nicht wieder den Sinn der Streitfrage ganz verändern? Die Frage ist nicht; ob sich ein System angeben lasse, worinn $l+1 = l-1 = l\sqrt{-1}$ &c. $= 0$ sey; es ist vielmehr die Frage, ob in den gebräuchlichen Systemen, im Nepperschen, Briggischen und andern, die davon nach einem beständigen Modulo abhängen $l-1$, $l\sqrt{-1}$, und s. f. $= 0$ sey. Auf die Art kann ich behaupten, es sey 23. 12 = = 1002; und wenn man mir entgegen setzt, dieß sey wider alle Rechnungsregeln, so darf ich nur folgendes antworten. Die Art, wie wir unsere Zahlen schreiben ist ganz willkührlich. Statt dessen, daß man die ersten neun Zahlen durch einfache Ziffern ausdrückt, kann man auch, wie Weigelius gewiesen hat, die ersten drey Zahlen durch einfache Ziffern ausdrücken, und sodann die Werthe der Classen von der rechten gegen die linke Hand in ratione quadrupla steigen lassen, statt dessen, daß sie sonst in ratione decupla steigen. Dann

aber ist 23 = eilf, und 12 = sechs; aber sechsmal eilf ist sechs und sechzig, und eben soviel drückt die Ziffer 1002 in der angenommenen Voraussetzung aus. So wenig hiedurch dargethan werden kann, daß nach dem einmal eingeführten decadischen Algarithmo 23. 12 = 1002 sey: eben so wenig beweisen auch die Schlüsse des Hrn. d'Alenbert, daß in den gebräuchlichen Systemen $l-1$ $l\sqrt{-1}$, u. s. f. = o sey, und dieß ist es doch eigentlich, was geläugnet wird. Hr. Euler schließt weiter, wenn $l\sqrt{-1} = o$ sey, so müsse der Satz falsch seyn, davon selbst Hr. Bernoulli der Erfinder ist, daß der Halbmesser sich zum Quadranten verhalte, wie $\sqrt{-1} : l\sqrt{-1}$, und hierauf erwidert Hr. d'Alenbert folgendes. Si dans cette propoſition $l\sqrt{-1}$ n'eſt pas $= o$, mais imaginaire, cela vient du ſyſtéme de Logarithmes, que l'on ſuppoſe dans l'équation entre les arcs de cercle z & leurs ſinus x. En effet $dz = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ donne $dz = \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{(xx-1)}} = \frac{-dx}{\sqrt{-1}.\sqrt{(xx-1)}}$; d'ou l'on tire $z = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l\frac{\sqrt{-1}}{x+\sqrt{(xx-1)}}$. Cette equation appartient a un ſyſtéme de Logarithmes tel, 1) que la ſoutangente de la Logarithmique, qui le repreſente, ſoit $\frac{1}{\sqrt{-1}}$, c'eſt à dire imaginaire, 2) que le Logarithme de $\frac{\sqrt{-1}}{x+\sqrt{(xx-1)}}$ ſoit imaginaire en donnant à x toutes les valeurs poſſibles depuis o jusqu'a l'unité. C'eſt un ſyſtéme, qui n'a rien de commun avec l'équation de la Logarithmique $x = ly$, dans laquelle y eſt ſuppoſée toujours réelle. Allein, entweder die Integration ist falsch, oder das l bedeutet hier den natürlichen Logarithmen von $\frac{\sqrt{-1}}{xx\sqrt{(xx-1)}}$, und das System mag durch den Modul $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ verändert werden, wie es wolle, so muß doch durch die Division mit diesem Modul das natürliche System wieder heraus kommen, und also $z\sqrt{-1} = \text{log.nat.}\frac{\sqrt{-1}}{x+\sqrt{(xx-1)}}$

seyn,

seyn, welches für $x = 1$ diese Gleichung giebt $\frac{1}{2}\sqrt{-1} = \log. nat. \sqrt{-1}$, und also giebt Hr. d'Alenbert hier zu, daß $\log. nat. \sqrt{-1}$ nicht $= 0$ sey. Was übrigens diese Art Gleichungen eigentlich sagen wollen, werde ich bald ausführlicher zeigen.

§. 21.

Hr. Euler bedienet sich, um den scheinbaren Schwierigkeiten in der Lehre von den Logarithmen abzuhelfen, des Satzes: **daß jede Größe unzählig viele Logarithmen habe**, und bereichert eben hiedurch die Analysin mit einer neuen überaus sinnreichen Theorie. Was die möglichen Größen betrift, so war es nur nöthig zu beweisen, daß $l+1$ sowohl, als $l-1$ unzählig viele Werthe habe, indem überhaupt $l+a = la + l1$ und $l-a = la + l-1$ seyn muß. Nun ergiebt die Gleichung, welche alle Werthe von $l+1$ ausdrückt, einen möglichen Werth dieses Logarithmen, nämlich den Werth $= 0$. Die übrigen Werthe sind alle unmöglich. Die Gleichung aber, welche alle Werthe von $l-1$ ausdrückt, giebt für diesen Logarithmen gar keinen möglichen Werth. Die Gleichung selbst, ist folgende $1 + y:n = \cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\,\sin\frac{(2\lambda-1)\pi}{n}$, worinn π die halbe Peripherie eines Zirkels, dessen Halbmesser $= 1$, $y = l-1$ und $n = \infty$ ist, λ aber alle ganze Zahlen bedeuten kann, selbst die 0 nicht ausgeschlossen. Diese Gleichung nun giebt $y = \pm(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}$, welcher Werth nie $= 0$ seyn kann, sondern allemal unmöglich ist. Inzwischen macht Hr. d'Alenbert auf der 197 S. der Opuscules dagegen diesen Zweifel. Er meynet, aus jener Gleichung $1 + y:n = \cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \pm \sqrt{-1}$, $\sin\frac{(2\lambda-1)\pi}{n}$ folge nicht allein diejenige, welche Hr. Euler daraus geschlossen hat, sondern noch überdem diese Gleichung $y = 0$, oder $l-1 = 0$. Wenn man nämlich in jener Gleichung $y = 0$, und $n = \infty$ setze, so werde sie identisch, und gebe $1 = 1$. Hr. d'Alenbert hat vermuth-

muthlich so geschlossen, es sey $o:\infty$ unendlich klein, und könne also weggelassen werden; eben so sey auch $\frac{(2\lambda-1)\pi}{\infty}\sqrt{-1}$ unendlich klein, und falle daher ebenfalls weg: welches denn $1=1$ giebt. Hierauf muß ich aber dieses erwidern. Wenn man aus obgedachter Gleichung den Werth von y herleiten, und mit der Gleichung selbst regelmäßig umgehen will, so muß man erwägen, daß diese Gleichung aus endlichen und unendlich kleinen Theilen bestehe, daß die endlichen Theile einander aufheben, und y in einem unendlich kleinen Theil der Gleichung enthalten sey. Nun ist bekannt, wenn gleich unendlich kleine Größen sonst gegen endliche verschwinden, daß doch in Gleichungen von dieser Art die unendlich kleinen Größen selbst untereinander verglichen werden müssen, und man also alle endliche Größen erstlich wegzuschaffen habe, bevor man aus der Gleichung weiter schließen kann. Man muß in obiger Gleichung zuerst untersuchen, was aus der Voraussetzung $n=\infty$ folgt, bevor man daran denken kann y zu bestimmen. Aber die Voraussetzung $n=\infty$ giebt $1+y:\infty=1\pm\frac{(2\lambda-1)\pi}{\infty}\sqrt{-1}$. Nun läßt sich der Werth von y nur durch die Vergleichung des Theils $y:\infty$ mit $\frac{(2\lambda-1)\pi}{\infty}\sqrt{-1}$ bestimmen, da 1 auf beyden Seiten durch die Subtraction wegfällt. Sonst kann man beweisen, daß y jeder endlichen Zahl gleich sey. Man setze z. Ex. $y=3$, so giebt das auch $1=1$, wenn man wie Hr. d'Alenbert schließen will: also ist auch $l-1=3$, und s. f. Aus eben der Gleichung glaubt Hr. d'Alenbert, noch auf eine andere Art den Werth $y=o$ herzuleiten. Er schließt so. Man setze $\lambda=n=\infty$, so hat man $1+y:n$ $=\text{cos}.2\pi=\sqrt{-1}\,\text{sin}\,2\pi$, oder $1+y:n=1$, also $y=o$. Allein wenn die Gleichung $1+y:n=1$ auch richtig aus der Voraussetzung folgte, so würde man doch nichts weiter als $y=o\,n$ daraus schließen können. Da aber $n=\infty$, so ist $o\,n$ ein ganz unbestimm-

ter Werth, den man keinesweges so schlechthin $= o$ setzen kann. Ueberdem gilt die vorige Erinnerung auch hier: denn es wird eigentlich $1 + \frac{y}{n} = \text{cos.}\ (2\pi - \frac{\pi}{n}) \pm \surd -1.\ \text{sin}\ (2\pi - \frac{\pi}{n})$. Aber $\text{sin}\ (2\pi - \frac{\pi}{n})$ ist $= - \text{sin}\ \frac{\pi}{n} = - \frac{\pi}{n}$, also wird vielmehr $1 + \frac{y}{n} = 1 \pm \frac{\pi}{n} \surd -1$, welches $y = \pm \pi \surd -1$ giebt; und dieß ist eben der Werth, der gefunden wird, wenn man $\lambda = o$ setzt, welches der Natur dieser Formuln völlig gemäß ist. Inzwischen muß ich auch dieses erinnern, daß eigentlich λ nie unendlich groß genommen werden müsse, wie sogleich unten erhellen wird.

§. 22.

Gegen den Satz selbst: daß jede Zahl unzählig viele Logarithmen habe, und gegen den Beweis desselben, womit Herr Euler ihn bestätiget, bringt Hr. d'Alenbert an der angezogenen Stelle weiter keine Zweifel vor. Inzwischen ist er doch nicht so schlechterdings mit dem Hrn. de Forcenex zufrieden, welcher in den Miscellaneis societatis privatæ Taurinensis der Lehre des Hrn. Euler beytritt: er setzt ihm in dem Supplement au memoire sur les logarithmes des quantités négatives, auf der 210 und f. S. der Opuscules Mathematiques solche Zweifel entgegen, die auch gewissermaßen wider die Theorie des Hrn. Eulers gerichtet sind. Allein ich hoffe, daß ich nicht allein im Stande seyn werde, auch diese Zweifel zu widerlegen, sondern bey dieser Gelegenheit zugleich verschiedene Anmerkungen beyzufügen, die dazu dienen können, diese ganze Theorie von der Mannigfaltigkeit der Werthe der Logarithmen in ihr völliges Licht zu setzen. Die Analysis des Hrn. Eulers setzt es außer Zweifel, daß der Satz selbst richtig sey: jede Zahl hat unzählig viele Logarithmen. Hr. von Segner setzt im IV Theil seines vortreflichen Cursus mathematici diese Analysin noch vollständiger auseinander, und trägt dadurch zur Aufklärung

dieser Theorie nicht wenig bey. Inzwischen scheint die Theorie noch in der Absicht unvollständig zu seyn, weil, so viel mir bekannt ist, noch Niemand gewiesen hat, daß die geometrische Construction alle diese unzähligen Logarithmen einer Zahl ebenfalls darstelle, und also die Geometrie auf die Frage: welches ist der Logarithmus einer gegebenen Größe? grade eben so viele Antworten ertheile, als die Analysis. Es scheint mir der Mühe nicht unwerth zu seyn, diese Untersuchung vorzunehmen, nicht allein deswegen, weil sich daraus aufs deutlichste ergiebt, woher diese Mannigfaltigkeit ihren Ursprung habe; sondern auch um deswillen, weil sich eben dadurch ein weit grösseres Licht über manche andere hiemit verwandte analytische Theorien verbreitet, wovon der Ausspruch des Hrn. Bernoulli (Mem. de l'Acad., de Prusse 1753. p. 148.) welchen auch Hr. Kaestner bey einer ähnlichen Gelegenheit einmal anführt, sonst gelten möchte: une Analyse abstraite, qu'on écoute sans aucun examen synthétique de la question proposée, est sujette à nous surprendre plûtôt, qu'à nous éclairer. Bevor ich aber die Construction selbst vortrage, werde ich zuforderst einige wenige die analytische Theorie selbst betreffende Anmerkungen voran setzen.

§. 23.

In der ersten Abtheilung dieser Abhandlung war meine Absicht nur, den Satz überhaupt zu beweisen: **In den gewöhnlichen Systemen sind die Logarithmen negativer Größen unmöglich**, da ich dann zugleich Gelegenheit hatte, beyläufig verschiedene von den Zweifeln, die Hr. d'Alenbert dagegen gemacht hatte, zu beantworten. Aber nun kann man weiter fragen: **Läßt sich denn der Logarithme einer negativen Zahl gar nicht durch eine analytische Formul ausdrucken?** Man muß mit Ja antworten, und die Formul die man sucht, läßt

sich

sich ohne alle Schwierigkeit so heraus bringen. Es sey e die Basis der natürlichen Logarithmen, und man setze $l{-}a = p + q\sqrt{-1}$, so muß $-a = e^{p+q\sqrt{-1}}$ seyn. Man theile beyde Verhältnisse $e:1$ und $-a:1$ oder $e^{p+q\sqrt{-1}}:1$ in m gleiche Theile, und setze der Kürze wegen $p+q\sqrt{-1} = f$, so erhält man für den $m$ten Theil eines jeden dieser Verhältnisse folgende $e^{1:m}:1$ und $e^{f:m}:1$. Es werde $m = \infty$, so ist $e^{1:m}:1 = 1 + \frac{1}{m}:1$ (1 Abtheil. §. 32.), also $e^{f:m}:1 = 1 + \frac{f}{m}:1$, und $e^f = (1 + \frac{f}{m})^m = -a$. Aus dieser Gleichung muß nun f gesucht werden. Sie giebt $1 + \frac{f}{m} = (-a)^{1:m}$ und also ist die Frage, was $(-a)^{1:m}$ bedeute? Es sey m eine sehr große Zahl, aber noch nicht in der Schärfe $= \infty$, so ist kein Zweifel, daß $(-a)^{1:m}$ nicht sollte unmöglich seyn, wenn m eine grade Zahl ist. Eigentlich nämlich hat $(-a)^{1:m}$ so viele Werthe, als m Einheiten enthält, diese sind aber gewiß alle unmöglich, wenn m gerade ist. Wäre m ungerade, so würde unter allen diesen Werthen einer möglich und negativ seyn. Aber dieser mögliche Werth, welchen $(-a)^{1:m}$ haben könnte, wenn m ungerade wäre, kann hier gar nicht gebraucht werden. Um alle die übrigen Werthe auf einmal zu übersehen, muß man bekanntermaßen die Zahl $-a$ mit der allgemeinen Form $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ oder $c(\cos\phi \pm \sin\phi\sqrt{-1}$ vergleichen, welche jede Zahl, sie mag möglich oder unmöglich seyn, ausdrücken kann, wenn $c = \sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}$, $\sin\phi = \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha\alpha - \beta\beta)}}$ und $\cos\phi = \frac{\beta}{\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta)}}$, also $\alpha = c\cos\phi$ und $\beta = c\sin\phi$ ist. Setzt man nun $-a = c(\cos\phi \pm \sin\phi\sqrt{-1})$ so wird $(-a)^{1:m} = c^{1:m}(\cos\frac{\phi}{m} \pm \sin\frac{\phi}{m} \times \sqrt{-1})$. Nun ist im gegenwärtigen Fall $\alpha = -a$, und $\beta = 0$, also $\cos\phi = -1$, $\sin\phi = 0$, und $c = a$. Diesemnach $\phi = \pm(2\lambda - 1)\pi$, und $(-a)^{1:m} = 1 + \frac{f}{m}$ $= a^{1:m} \times (\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2\lambda-1)\pi}{m})$. Hiebey ist nun

vor allen Dingen dieses zu merken, daß zwar λ alle ganze Zahlen 0, 1, 2, 3 und s. f. nach der Reihe bedeuten könne, aber nie eine so große Zahl, welche gegen m ein endliches Verhältniß hat. Wenn man alle Wurzeln haben wollte, so müßte man freylich fortgehen, bis $2\lambda - 1 = m$, oder $\lambda = \frac{m+1}{2}$ würde. Wäre nun m eine ungrade Zahl, so würde für $\lambda = \frac{m+1}{2}$, heraus kommen $1 + \frac{f}{m} = a^{1:m} \times -1$, welches nicht angehet, und der Voraussetzung zuwider ist; (denn $a^{1:m}$ ist $= 1 + {}^{1:m}$, und hat hier keinen andern Werth, vermöge der Natur der Formul), diese mögliche negative Wurzel fällt also ganz weg. Ist m grade, so kann ohnehin keine einzige Wurzel möglich seyn. Aber unter allen diesen unmöglichen Wurzeln, sind nur diejenigen um ein unmögliches Element von 1 unterschieden, die aus der Formul ihren Ursprung haben, so lange $\frac{2\lambda-1}{m}$ unendlich klein, und also $\cos\frac{(2\lambda-1)\pi}{m} = 1$ und $\sin\frac{2\lambda-1\pi}{m} = \frac{(2\lambda-1)\pi}{m}$ ist, und diese können nur gebraucht werden. In dieser Voraussetzung also: daß λ gegen m kein endliches Verhältniß bekomme, wird $1 + \frac{f}{m} = a^{1:m}(1 + \frac{(2\lambda-1)\pi}{m} \times \sqrt{-1})$. Es sey der natürliche Logarithme von $a = l$, so ist $a = e^l$, und $a^{1:m} = e^{l:m} = (1 + \frac{1}{m})^l = 1 + \frac{l}{m}$, also $1 + \frac{f}{m} = (1 + \frac{l}{m})(1 \pm \frac{(2\lambda-1)\pi}{m}\sqrt{-1}) = 1 + \frac{l}{m} \pm \frac{(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}}{m} \pm \frac{l(2\lambda-1)\pi}{mm}\sqrt{-1}$.

Hieraus folgt $\frac{f}{m} = \frac{l}{m} \pm \frac{(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}}{m} \pm \frac{l(2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}}{mm}$, und $f = l \pm (2\lambda-1)\pi\sqrt{-1}$.

§. 24.

§. 24.

In diesen Formuln bedeutet $a^{1:m}$ die positive mögliche Wurzel der Ordnung m von a, keine andere, obgleich $a^{1:m}$ für sich ebenfalls m verschiedene Werthe hat. Diese Wurzel, welche hier allein verstanden werden muß, ist $1 + \frac{l}{m}$, wenn $a = e^{l}$ und $e^{1:m} = 1 + \frac{1}{m}$ ist. Weil man nun bey der gewöhnlichen Berechnung der Logarithmen positiver Größen keinen andern, als diesen einzigen möglichen Werth von $e^{1:m}$ und $a^{1:m}$ in Betrachtung ziehet, so erhält man auch nur einen einzigen Werth für $l+a$. Man setzt nämlich alle mögliche positive Verhältnisse aus dem Elementarverhältniß $1 + \frac{1}{m}:1$ nach einem möglichen Exponenten zusammen. Das Elementarverhältniß muß positiv seyn, wofern alle mögliche Zahlen mögliche Logarithmen haben sollen. (1 Abtheil. §. 30). Aber aus eben dem positiven Elementarverhältniß lassen sich die positiven Verhältnisse, auch nach einem **unmöglichen Exponenten**, zusammen setzen. Es folgt also nicht, wenn das Elementarverhältniß positiv ist, daß die positiven Verhältnisse **keine andere als mögliche** Logarithmen haben sollten. Denn man nehme nun an, es sey der allgemeine Ausdruck des Logarithmen eines positiven Verhältnisses dieser: $p + q\sqrt{-1}$, so daß $l + a = p + q\sqrt{-1}$ ist, und es wird $a = e^{p+q\sqrt{-1}}$ seyn müssen. Der Kürze wegen sey auch hier $p + q\sqrt{-1} = f$, so hat man $(+a)^{1:m} = e^{f:m} = (1 + \frac{1}{m})^{f} = 1 + \frac{f}{m}$, wo $1 + \frac{1}{m}$ die positive mögliche Wurzel der Ordnung m von e ist. Wenn man nun $+a = \alpha + \beta\sqrt{-1} = c(\cos\phi \pm \sqrt{-1}.\sin\phi)$ setzt, so erhält man $+a = \alpha$, $\phi = o$, also $\sin\phi = o$, $\cos\phi = +1$, $c = a$, $\phi = 2\lambda\pi$, und $a^{1:m}(\cos\frac{2\lambda\pi}{m} \pm \sqrt{-1}.\sin\frac{2\lambda\pi}{m}$. Es sey der positive mögliche Werth von $a^{1:m} = 1 + \frac{l}{m}$, so wird $a^{1:m} = (1 + \frac{l}{m})\ (\cos\frac{2\lambda\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2\lambda\pi}{m}) = 1 + \frac{f}{m}$, wo

statt λ wiederum alle ganze Zahlen 0. 1. 2. 3. u. s. w. gesetzt werden können. Man würde alsdann allererst alle diese Wurzeln haben, wenn man bis auf $\lambda = \frac{1}{2} m$ gekommen wäre. Aber dieß würde die zweyte mögliche Wurzel $- (1 + \frac{l}{m})$ geben, welche schlechthin ausgeschlossen wird. Ueberdem können nur alle diejenigen Wurzeln, welche von 1 um ein unmögliches Element unterschieden sind, der Gleichung ein Genüge thun. Also darf man nur diejenigen nehmen, welche die Formul giebt, so lang λ gegen m kein endliches Verhältniß hat. Man darf also λ nicht unendlich groß nehmen, und in dieser Voraussetzung wird $1 + \frac{f}{m} = (1 + \frac{l}{m}) (1 \pm \frac{2\lambda\pi}{m} \sqrt{-1}) = 1 + \frac{l}{m} \pm \frac{2\lambda\pi}{m} \sqrt{-1} \pm \frac{l.\, 2\lambda\pi.\, \sqrt{-1}.}{mm}$ Dieß giebt $\frac{f}{m} = \frac{l}{m} \pm \frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{m} \sqrt{-1} \pm \frac{l.\, 2\lambda\pi\sqrt{-1}}{m.m}$, und $f = l \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$. Vermöge dieser Analysis wird also dasjenige bestätiget, was ich im 21 §. gegen den Hrn. d'Alenbert erinnert habe, daß nämlich eigentlich λ nie unendlich groß genommen werden müsse. Daß aber des Hrn. d'Alenberts Voraussetzung einen richtigen Werth von y gab, wenn man mit der Gleichung gehörig umgieng, rührte daher, weil allemal, wenn man bis $\lambda = m$ gekommen ist, die Reihe der Wurzeln wieder von neuem anfängt.

§. 25.

Auf die unmöglichen Größen, werde ich die Analysin nicht anwenden, da sie sowohl von Hr. Euler, als auch von Hrn. von Segner vollständig genug ausgeführet, und die Anwendung leicht zu machen ist. Hier kam es mir nur darauf an, es völlig evident zu machen, daß nicht alle Wurzeln, welche die Formul überhaupt geben kann, sondern nur diejenigen genommen werden müssen, welche von 1 um ein unmögliches Element unterschieden sind. Ich setze deswegen nur noch diese Anmerkung hinzu. Wenn

$a = e$ ist, so ist $le = 1$, also wird $e^{1:m} = (1 + \frac{1}{m})(1 \pm \frac{2\lambda\pi}{m}\sqrt{-1}) = 1 + \frac{1}{m} \pm \frac{2\lambda\pi}{m}\sqrt{-1} = 1 + \frac{1}{m}(1 \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1})$ und es enthält die Formul $1 + \frac{1}{m}(1 \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}) : 1$ alle Werthe, die das Elementarverhältniß haben kann, wenn ein positives Endliches daraus zusammen gesetzt werden soll. Auf eben die Art findet man aus dem §. 23. $1 + \frac{1}{m}(1 \pm (2\lambda - 1)\pi\sqrt{-1}) : 1$ für den Ausdruck des Elementarverhältnisses, daraus sich alle negative Verhältnisse zusammen setzen lassen. Jenes Verhältniß ist $= (1 + \frac{1}{m})^{1 \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}}$, und dieses $= (1 + \frac{1}{m})^{1 \pm (2\lambda - 1)\pi\sqrt{-1}} : 1$. Beyde Verhältnisse kann man als solche ansehen, die das gemeinschaftliche Maas $1 + \frac{1}{m} : 1$ haben, obgleich letzteres gar nicht anders, als nach einem unmöglichen Exponenten daraus zusammen gesetzt werden kann. Also ist das Verhältniß $1 + \frac{1}{m} : 1$ das gemeinschaftliche Maas aller möglichen, sowohl positiven, als negativen Verhältnisse. Man kann aber jedes positive Verhältniß sowohl, als auch jedes negative, auf unzählig viele verschiedene Arten daraus zusammen setzen, wenn die unmöglichen indices multiplicitatis nicht ausgeschlossen werden: und dieß ist der Ursprung der mannigfaltigen Werthe, welche die Logarithmen einer und eben derselben Zahl, in einem und eben demselben System haben können. Das System bleibt dasselbe so lange $l(1 + \frac{1}{m})^n = n:m$ bleibt, oder, wenn man $\frac{n}{m} = z$ setzet; so lange $l(1 + \frac{z}{m})^m = z$ bleibt. Aber nun wird auch $l(1 + \frac{1}{m})^n(\cos\phi \pm \sqrt{-1}\sin\phi) = \frac{n(\cos\phi + \sqrt{-1}\sin\phi)}{m}$. Wenn also nunmehro $\frac{n(\cos\phi + \sqrt{-1}\sin\phi)}{m} = f$ gesetzt wird, so erhält man $n(\cos\phi + \sqrt{-1}.\sin\phi) = mf$ und $(1 + \frac{1}{m})^{n(\cos\phi \pm \sqrt{-1}\sin\phi)} = (1 + \frac{1}{m})^{mf} = (1 + \frac{f}{m})^m$, und $l(1 + \frac{f}{m})^m = f$. Aber $(1 + \frac{f}{m})^m$ kann

kann jede gegebene Zahl bedeuten, und es kann f noch unzählige Werthe haben. Also gehören alle diese mannigfaltigen Werthe von f dennoch zu einerley System, dessen Modulus $= 1$ ist. Nun mag x bedeuten, was es wolle, so kann man $x = (1 + \frac{f}{m})^m$ setzen, das giebt $x^{1:m} = 1 + \frac{f}{m}$, und $f = mx^{1:n} - m. = lx$, wo also unter allen möglichen Werthen von $x^{1:m}$ nur diejenigen zu nehmen sind, die von der 1 um ein mögliches oder unmögliches Element unterschieden sind, nachdem f möglich oder unmöglich ist. Denn die übrigen können mit der Voraussetzung nicht bestehen, daß $1 + \frac{1}{m}$ das gemeinschaftliche Maas aller Verhältnisse seyn soll. Und hiedurch wird die völlige Richtigkeit der Analysis des Hrn. Eulers erwiesen, wenn er in seinen Gleichungen statt λ keine andere, als endliche Zahlen setzt.

§. 26.

Nunmehro sey die gleichseitige Hyperbel gewöhnlicher massen zwischen ihren Asymtoten, TV, XY, verzeichnet, und die halbe Zwergaxe CA, welche der halben conjugirten Axe CE gleich ist, sey $= 1$ genommen. Ist nun $MP = y$ eine rechtwinklichte Ordinate, der auf der Zwergaxe die Absciße $CP = x$ zugehört; so hat man für die Hyperbel die Gleichung $y = \pm \sqrt{(xx - 1)}$. Man weis, daß beyde Werthe nur so lange möglich sind, als $+x > +1$ und $-x > -1$ genommen wird. Inzwischen nehme man $CQ < 1$, so wird $y = \pm \sqrt{(CQ^2 - 1)} = \pm \sqrt{(1 - CQ^2)} \sqrt{-1}$. Man mache die Ordinate $QG = + \sqrt{(1 - CQ^2)}$ und $QH = - \sqrt{(1 - CQ^2)}$, so wird die der Absciße $x = CQ$ zugehörige Ordinate $y = \pm QG \sqrt{-1}$ und $\pm QG = \frac{y}{\sqrt{-1}} = -y\sqrt{-1}$. Diesemnach ist QG eine unmögliche Ordinate der Hyperbel in eben dem Verstande, in welchem CE die unmögliche halbe conjugirte Axe der Hyperbel heißt. Es wird nämlich $y = \pm \sqrt{-1}$ für $x = 0$, oder $y = \pm 1 . \sqrt{-1}$. Nimmt

man

man nun CE = CF = 1, so wird $y = \pm$ CE $\sqrt{-1}$, und $\pm$CE = $\frac{y}{\sqrt{-1}} = -y\sqrt{-1}$. Auf eben die Art kann man für alle x, die zwischen den Gränzen + 1 und — 1 fallen, die zugehörigen Ordinaten zeichnen, welche zwar an sich mögliche Größen sind, aber deswegen hier als unmögliche Größen in der Rechnung vorkommen, weil sie Ordinaten der Hyperbel seyn sollen, und es doch nicht sind. Man setze $z = \pm\sqrt{(1-xx)}$, so wird für die Hyperbel $y = z\sqrt{-1}$, aber $z = \pm\sqrt{(1-xx)}$ ist eine Gleichung für den Zirkel, der aus dem Mittelpunct C mit dem Halbmesser CA = 1 beschrieben werden kann. Alle Ordinaten dieses Zirkels sind unmögliche Ordinaten der Hyperbel, weil $z = \frac{y}{-\sqrt{-1}} = \mp y\sqrt{-1}$ ist. Aber auch umgekehrt, alle Ordinaten der Hyperbel sind unmögliche Ordinaten des Zirkels, weil $y = z\sqrt{-1}$ ist. Hieraus folget, daß der Zirkel ein unmögliches Stück der Hyperbel sey, so wie die Hyperbel ein unmögliches Stück des Zirkels ist. Der Zirkel hängt mit der Hyperbel in zwenen Puncten A und B zusammen. Deswegen giebt es Bogen, die in der Hyperbel den einen Endpunct z. E. M, und im Zirkel den andern Endpunct z. E. G haben. Alle Bogen von dieser Art können sowohl unmögliche Bogen des Zirkels, als auch unmögliche Bogen der Hyperbel heißen. Beyde Linien haben bey A und B eine gemeinschaftliche Tangente, und formiren bey diesen Puncten zwey entgegengesetzte Spitzen MAG, NAH, ingleichen mBF, nBE. Weil überdem alle die Bogen, welche in A sowohl, als B zusammen stossen, durch eine gemeinschaftliche Gleichung ausgedrückt werden, so ist jeder von den vier Bogen, die in A oder B zusammen stossen, die Fortsetzung eines jeden der drey übrigen. Zwischen jeden zweyen Puncten also, davon der eine in der Hyperbel, der andre im Zirkel liegt, fallen unzählig viele verschiedene Bogen. So fallen zwischen M und G folgende;

MAG, MAGEBFHAG, und überhaupt MAG + $2\lambda\pi$ ferner auch diese

MAHFBEG, und überhaupt MAHFBEG + $2\lambda\pi$, wo λ und π die vorhin schon gebrauchte Bedeutung haben. Wenn nun der Ausdruck Arc. Absc. x den Bogen bedeutet, welcher in A anfängt, und da aufhört, wo die zu x gehörige Ordinate PM, oder PN die Hyperbel trift; so bezeichnet dieser Ausdruck unzählig viele verschiedene Bogen, nämlich alle folgende.

AM, AEBFAM, AEBFAEBFAM u. s. w. ingleichen AM, AFBEAM, AFBEAFBEAM, u. s. w.

Wenn die Bogen, so sich von A durch E erstrecken, mit + bezeichnet werden, so muß man diejenigen, so sich von A durch F erstrecken mit — bezeichnen. Also gehören dahin alle Bogen, welche der Ausdruck $\pm\lambda$ AEBFA + AM bezeichnet, wenn λ alle ganze Zahlen, 0. 1, 2, 3, u. s. w. andeutet. Wenn demnach der Ausdruck Sect. Absc. x den Ausschnitt bedeutet, welchen der jeder Abscisse x zugehörige Bogen der Hyperbel einschließt, so bezeichnet eben dieser Ausdruck unzählig viele verschiedene Ausschnitte, die alle zwischen CA, CM, und den von A bis M fortgehenden Bogen enthalten sind.

§. 27.

Man weis aus den bekannten Eigenschaften der Hyperbel, daß D. Sect. ACM $= \frac{dx}{2\sqrt{(xx-1)}} = \frac{dx}{2\sqrt{(1-xx)}\sqrt{-1}}$ sey. Aber dieß ist nicht allein ein Differential des Ausschnitts, dem der Bogen AM zugehört, sondern eines jeden andern, dem einer von den übrigen Bogen zugehört, die sich von A bis M erstrecken. Demnach ist eigentlich D Sect. Absc. $x = \frac{dx}{2\sqrt{(xx-1)}} = \frac{dx}{2\sqrt{(1-xx)}\sqrt{-1}}$,

und

und durch die Integration erhält man Sect. Absc. $x = \frac{1}{2}\, l(x + \surd(xx-1)) = \surd -1 \times \frac{1}{2}$ Arc. $\cos x = \surd -1$. Sect. $\cos x$, in der Voraussetzung nämlich, daß dieser Ausschnitt $= o$ sey, wenn $x = 1$, wie denn dieß auch wirklich einer von den Werthen dieses Ausschnitts ist, für $x = o$. Frägt man also, welches der natürliche Logarithme von $x + \surd(xx-1)$ sey, so frägt man in der That nach etwas, daß auf unzählig viele verschiedene Arten beantwortet werden kann. So lange x kleiner als 1 ist, wird Sect. $\cos x$ zwar für sich eine mögliche Größe, weil aber dieser Ausschnitt hier als ein Ausschnitt der Hyperbel angesehen wird; so ist er unmöglich. Für $x = 1$ ist dieser Ausschnitt $= \pm \lambda \pi \surd -1$. Der natürliche Logarithme von $x + \surd(xx-1)$ ist vermöge der Formul doppelt so groß, als dieser Ausschnitt, also erhält man $l + 1 = \pm 2\lambda\pi \surd -1$. In der That drückt auch dieses alle hyperbolische Sectoren aus, deren Bogen in A anfangen und wieder aufhören. Sie sind

AEBFA, 2 AEBFA, 3 AEBFA, u. s. w. oder
AFBEA, 2 AFBEA, 3 AFBEA, u. s. w.

Wenn $x > 1$ genommen wird, so hat man $l(x + \surd(xx-1)) = 2$ Sect. Absc. x, das ist, $l(x + \surd(xx-1))$, hat folgende Werthe. 2 ACM; 2 ACM $\pm$ 2 Sect. AEBFA; 2 ACM $\pm$ 4 Sect. AEBFA; u. s. w. oder 2 ACM; 2 ACM $\pm 2\pi\surd -1$; 2 ACM $\pm 4\pi\surd -1$; u. s. w. also überhaupt $l\, x + \surd(xx-1) = 2$ ACM $\pm 2\lambda\pi\surd -1$, welches mit der Analysi, völlig übereinstimmt. Es kann nun $x + \surd(xx-1)$ eine jede positive mögliche Zahl, die > 1 ist, ausdrücken, und man kann x allemal so nehmen, daß $x + \surd(xx-1)$ einer Zahl von dieser Art gleich wird. Soll $x + \surd(xx-1) = 1 + A$ seyn, so wird $\surd(xx-1) = 1 + A - x$. Es ist offenbar, daß dieß allemal eine einfache Gleichung werde: denn wenn man qua-

drirt, so erhält man $xx - 1 = (1+A)^2 - 2x(1+A) + xx$, wo xx nothwendig allemal heraus fällt; so daß $x = \frac{(1+A)^2+1}{2(1+A)} = 1 + \frac{AA}{2(1+A)}$, und folglich allemal größer als 1 wird. Der Ausdruck 2 Sect. cos$x\sqrt{-1}$ bezeichnet nun noch immer ebenfalls den $l(x+\sqrt{(xx-1)}$, oder wie man es auch ausdrücken kann, den $l(x+\sqrt{(1-xx)}\sqrt{-1}$. Nun muß man sich aber durch die Zeichen $\sqrt{-1}$ nicht verführen lassen, hier eine andere Unmöglichkeit zu suchen, als wirklich da ist. Da $x > 1$ ist, so ist $\sqrt{(1-xx)}\sqrt{-1}$ eine mögliche Größe. Der hyperbolische Ausschnitt, den man sucht, ist wirklich ein unmöglicher Zirkelausschnitt, weil man aber keinen Zirkelausschnitt sucht, sondern den Hyperbolischen, so ist in dem Ausdruck 2 Sect. cos. $x\sqrt{-1}$ die Unmöglichkeit auch nur scheinbar. Die Zeichen Sect. Absc. x, und Sect. cos. $x\sqrt{-1}$ sind nun äquipollent, denn eigentlich ist jetzt der Zirkelausschnitt unmöglich, und Sect. cos. $x = -$ Sect. Absc. $x\sqrt{-1}$. Wenn man dieß in dem Ausdruck Sect. cos. $x\sqrt{-1}$ substituirt, so hat man Sect. Absc. x. Die möglichen Logarithmen sind also mögliche Ausschnitte der Hyperbel, diese aber sind zugleich unmögliche Ausschnitte des Zirkels, dessen Durchmesser mit der Axe der Hyperbel einerley ist. Von einer andern Unmöglichkeit ist hier gar die Rede nicht. Uebrigens ist hiebey noch anzumerken, daß der Ausdruck $\sqrt{(xx-1)}$ seiner Natur nach zweydeutig sey, man kann ihn also auch negativ nehmen, und so hat man überhaupt 2 Sect. Absc. $x = l(x \pm \sqrt{(xx-1)}$. Es ist nämlich vermöge der bekannten Eigenschaften der Hyperbel $\frac{x+\sqrt{(xx-1)}}{1} = \frac{1}{x-\sqrt{(xx-1)}}$, also $l\,x - \sqrt{(xx-1)} = -l(x+\sqrt{(xx-1)}$. Weil nun der Ausschnitt ACN $=-$ACM; so wird ACN $= -l(x+\sqrt{(xx-1)} = l\,x - \sqrt{(xx-1)}$. Wenn man also in dem allgemeinen Ausdruck 2 Sect. Absc. $x = l\,x \pm \sqrt{(xx-1)}$ das untere Zeichen braucht, so muß allemal der Ausschnitt ver-

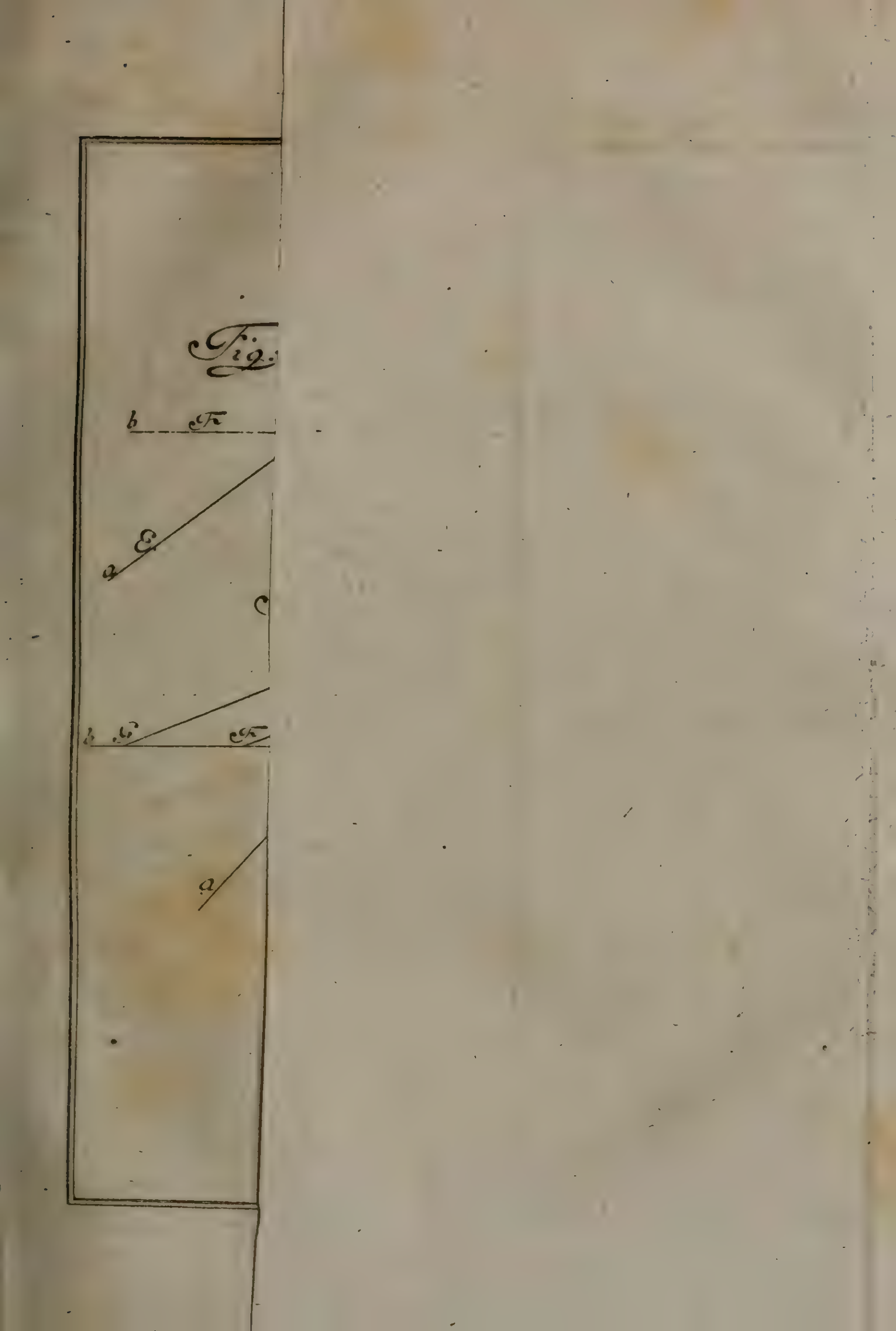
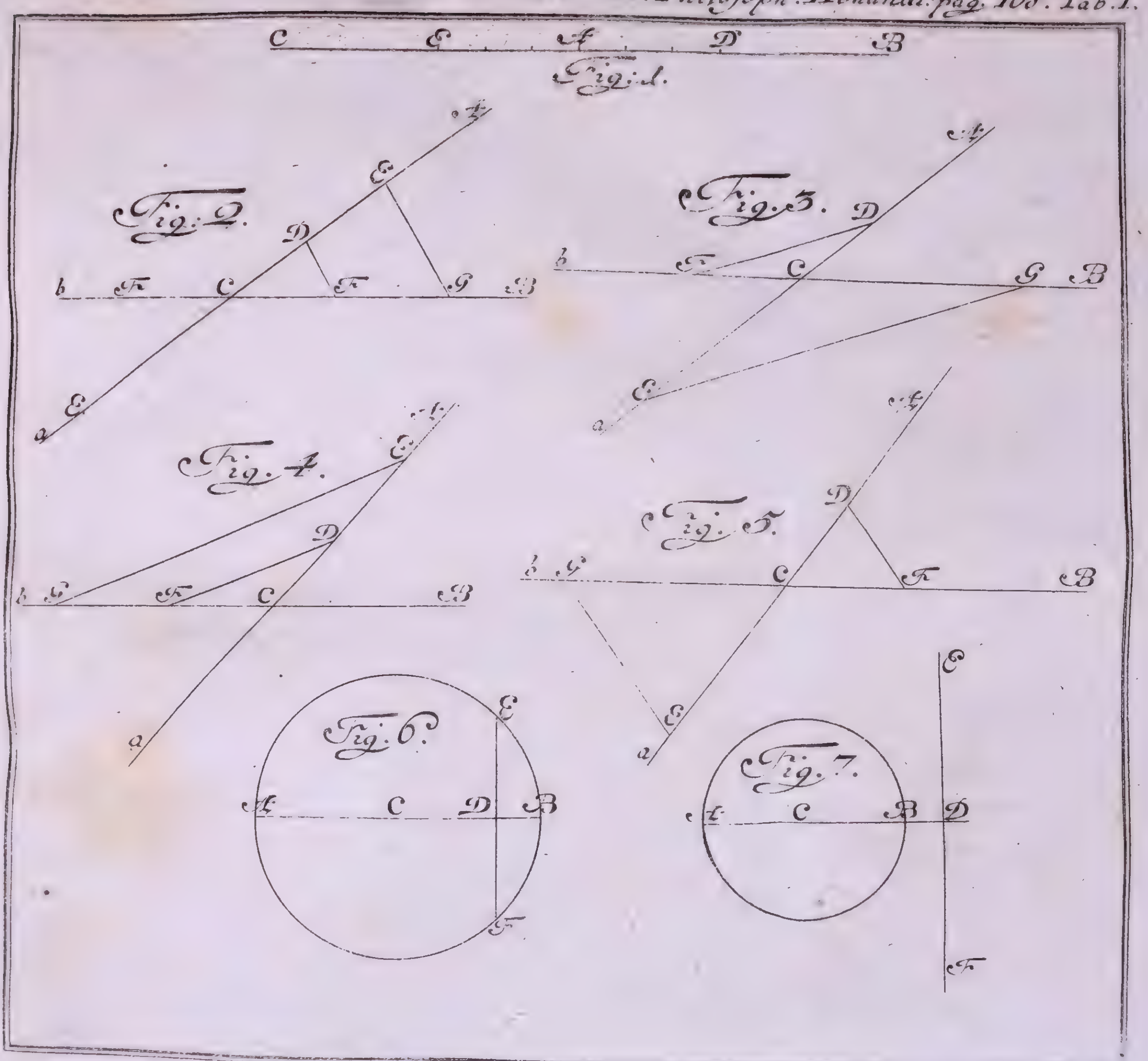
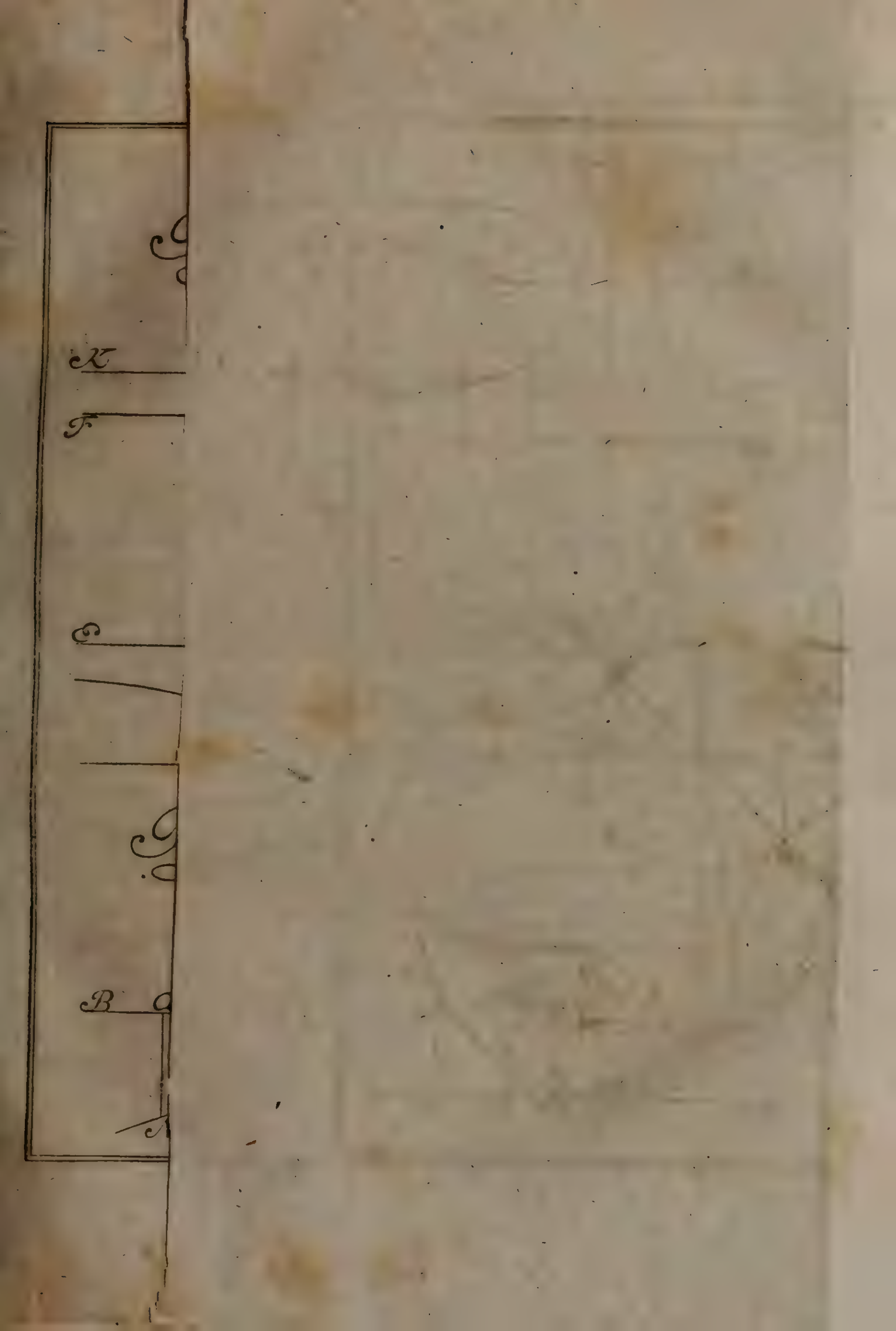
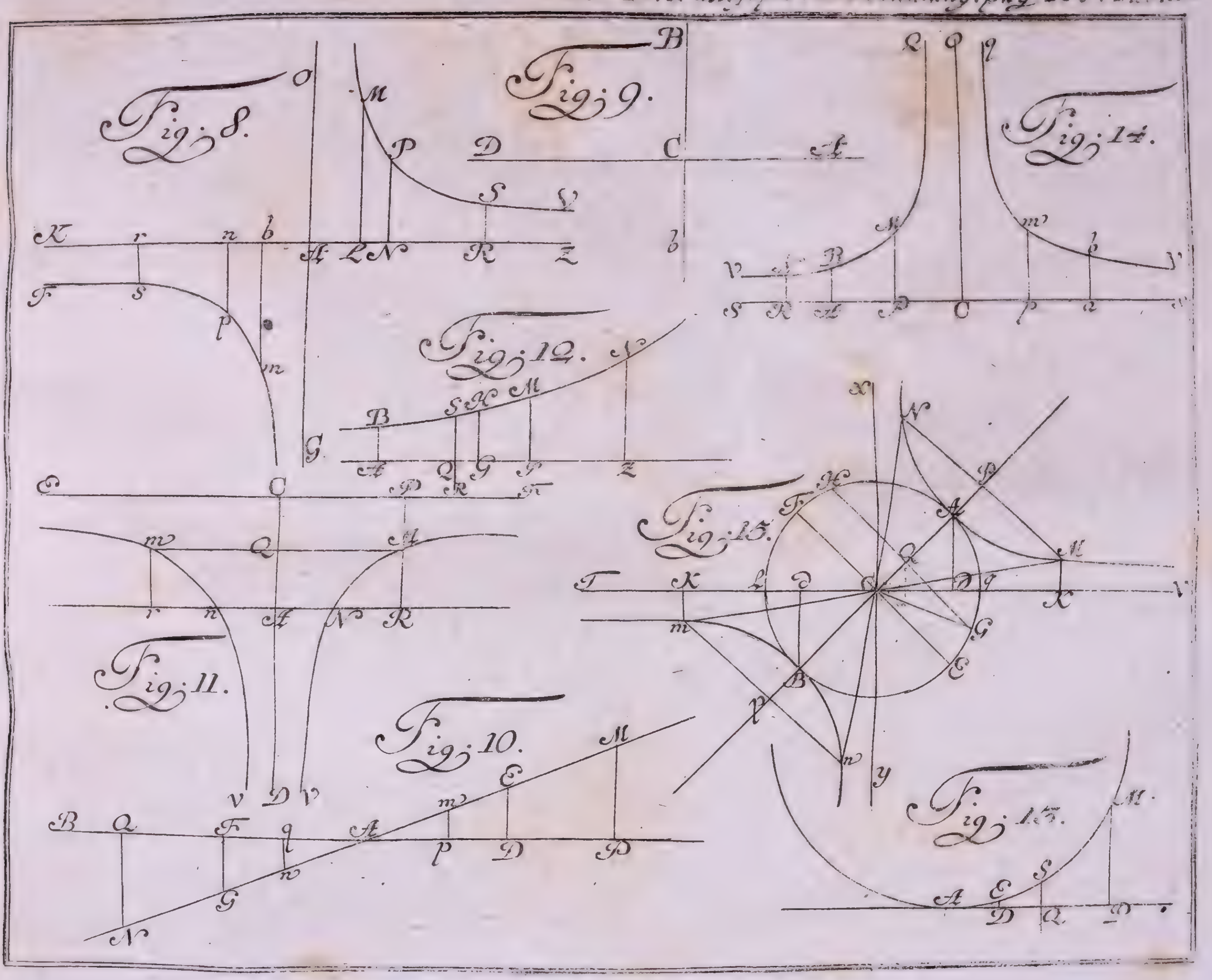


Fig.
b
F
E
a
C
b
G
F
a



C E A D B
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.




Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.

verstanden werden, dessen Bogen sich von A bis N erstreckt. Aber solcher Ausschnitte giebt es wiederum unzählige, und also findet man für den Logarithmen eines jeden Bruchs folgende: 2 ACN; 2 ACN $\pm$ Sect. 2 AEBFA; 2 ACN $\pm$ 4 Sect. AEBFA; u. s. w. oder 2 ACN; 2 ACN $\mp 2\pi\sqrt{-1}$; 2 ACN $\mp 4\pi\sqrt{-1}$ u. s. w. also überhaupt $l(x-\sqrt{(xx-1)}) = 2\,ACN \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1} = -2\,ACM \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$. Es läßt sich auch hier allemal x so nehmen, daß $x-\sqrt{(xx-1)}$ jeden gegebenen eigentlichen Bruch ausdrückt, wovon man sich eben so, wie vorhin, überzeugen kann.

§. 28.

Die bisherige Verzeichnung, giebt also die Logarithmen aller positiven Zahlen von $+\infty$ bis zur o. Wird nun $x<1$, so wird $x\pm\sqrt{(xx-1)}$ eine unmögliche Zahl. Man kann sie jetzt am bequemsten auf diese Art ausdrücken: $x\pm\sqrt{(1-xx)}\sqrt{-1}$. Es sey $x=$ CQ, so ist QG $=\sqrt{(1-xx)}$ eine unmögliche Ordinate der Hyperbel, aber eine mögliche Ordinate des Zirkels, und wenn man den Bogen AG $=\rho$ setzt, so ist $x=\cos\rho$ und $\sqrt{(1-xx)}=\sin\rho$. Braucht man diese Ausdrücke, so wird 2 Sect. Absc. $x = l(\cos\rho \pm \sin\rho.\sqrt{-1})$. Die Größe $\cos\rho. \pm \sin\rho\sqrt{-1}$ ist unmöglich, und sie hat unzählige Logarithmen, die ebenfalls insgesammt unmöglich sind. Jeder Ausschnitt nämlich, der zwischen CA, CG, und dem von A nach G sich erstreckenden Bogen fällt, doppelt genommen, ist ihr natürlicher Logarithme. Diese Bogen sind aber

AG; AG + GBFAG; AG + 2 GBFAG, u. s. w. oder auch AFBG; AFBG + GAFBG; AFBG + 2 GAFBG, u. s. f.

Also sind auch obiger Ausschnitte unzählige, welche die Formul $\frac{1}{2}\rho\sqrt{-1}\pm\lambda\pi\sqrt{-1}$ überhaupt ausdrückt; daher erhält man $l(\cos\rho$

 $+\sin\rho$

$+ \sin\rho \sqrt{-1}) = \pm \rho \sqrt{-1} \pm 2\lambda\pi \sqrt{-1}$ hat $\sin\rho \sqrt{-1}$. Das Zeichen — vor sich, so ist auch ρ negativ, und man muß die entgegengesetzten Ausschnitte nehmen, deren Bogen sich von A nach H erstrecken, und man erhält $l(\cos\rho - \sin\rho \sqrt{-1}) = -\rho \sqrt{-1} \mp 2\lambda\pi \sqrt{-1}$. Wird $x = 0$, so fällt G in E und H in F, und es wird $l + \sqrt{-1} = \pm (\frac{1}{2}\pi \sqrt{-1} \pm 2\lambda\pi \sqrt{-1})$. Weil man auch $\lambda = 0$ nehmen kann, so ist dieß die bernoullische Regel $l\sqrt{-1} = \frac{1}{2}\pi \sqrt{-1}$, oder $\frac{l\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}\pi$, und es erhellet, daß $l\sqrt{-1}$ hier kein andrer, als der natürliche Logarithme von $\sqrt{-1}$ seyn könne. Für negative x bleibt die Verzeichnung eben so, aber nur so lange, als $-x < -1$ ist. Es wird nunmehro $\rho > 90°$, da dann noch $\sin\rho$ entweder positiv oder negativ seyn kann, obgleich $\cos\rho$ nun negativ ist. Um nun hieraus abzunehmen, wie der Logarithme einer jeden unmöglichen Zahl sich geometrisch verzeichnen lasse, darf man nur bemerken, daß sie allemal unter der Form $a + b\sqrt{-1}$, begriffen seyn werde. Demnach nehme man ρ so, daß $\tang\rho = b:a$ wird, so hat man $\sin\rho = \frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$, $\cos\rho = \frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$ und $a + b\sqrt{-1} = (\cos\rho + \sin\rho \sqrt{-1}) \sqrt{(aa+bb)}$. Nun nehme man $ACM = l\sqrt{(aa+bb)}$, und $CQ = \frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$, da denn $QG = \frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ wird, (man müßte QH nehmen, wenn b negativ wäre) so sind alle Ausschnitte, deren Bogen sich von M nach G, oder auch von M nach H erstrecken, diejenigen, welche man sucht. Die hieher gehörigen Bogen sind MAG; MAG + GBFAG; MAG + 2 GBFAG, und s. f. ingleichen MAFBG; MAFBG + GAFBG; MAFBG + 2 GAFBG, und s. w. welches alles den eulerischen Formuln völlig gemäß ist.

§. 29.

§. 29.

Es werde nun $x = -1 = CB$, so ist $x + \sqrt{(xx-1)} = -1$, $p = 180°$, und der Bogen, welche zwischen A und B fallen, sind keine andere, als AEB; AEB + BFAEB; AEB + 2 BFAEB, u.s.f. oder auch AFB; AFB + BEAFB; AFB + 2BEAFB, u. s. f. daraus folgt, daß die Ausschnitte, denen diese Bogen zugehören, doppelt genommen, die natürlichen Logarithmen von -1 sind. Unter diesen ist gewiß keiner $= o$, sondern sie sind alle in der Formul begriffen $l-1 = \pm (2\lambda+1)\pi \sqrt{-1}$, und ich fürchte nicht, daß diese Verzeichnung einer Unrichtigkeit beschuldiget werden könne. Wird $-x > -1$ so wird $-x \pm \sqrt{(xx-1)}$ eine negative Zahl, und auch hier stimmt die Verzeichnung mit der Analysi völlig überein. Es sey $x = -Cp$, und $+\sqrt{(xx-1)} = pn$, so ist $l(-x+\sqrt{(xx-1)}$ der doppelte Ausschnitt, zwischen CA, Cn und dem Bogen, welcher sich von A bis n erstreckt: dahin gehören nun die Bogen AEBn; AEBFAEBn, u. s. f. ingleichen AFBn, AFBEAFBn, u. s. f. demnach wird $l-x+\sqrt{(xx-1)} = \pm (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1} + 2$ BCn. Aber es ist Bln = ACN $= \frac{1}{2} l(+x-\sqrt{(xx-1)}$ wenn hier der mögliche Logarithme allein verstanden wird. Also hat man $l(-x+\sqrt{(xx-1)} = l(+x-\sqrt{(xx-1)} \pm (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1}$. Für eben die Abscisse $x = -Cp$ sey $pm = -\sqrt{(xx-1)}$, so ist $l(-x-\sqrt{(xx-1)}$ der doppelte Ausschnitt zwischen CA, Cm, und dem Bogen, der sich von A bis m erstreckt. Aber solcher Bogen giebt es wiederum folgende: AEBm; AEBFAEBm, u. s. f. ingleichen AFBm; AFBEAFBm, u. s. f. diesemnach wird $l(-x-\sqrt{(xx-1)}) = \pm (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1} + 2$ BEm. Da nun wiederum BCm = ACM $= \frac{1}{2} l(x+\sqrt{(xx-1)})$, so erhält man $l(-x-\sqrt{(xx-1)}) = l(+x+\sqrt{(xx-1)}) \pm (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1}$. Die Geometrie ist also der leibnitzischen Lehre, daß die Logarithmen negativer Größen unmöglich seyn, so wenig ent-

entgegen, daß sie vielmehr dieselbe völlig bestätiget. Und wie die bisher vorgetragenen geometrischen Verzeichnungen aufs genaueste für jede Zahl alle diejenigen unzähligen Logarithmen ergeben, welche derselben vermöge der eulerischen Analysis zugehören; so ist dieß ein vortrefliches Beyspiel davon, wie genau die geometrische Verzeichnung mit der Analysi übereinstimme, daferne nur die Verzeichnung der analytischen Formul genau angemessen ist, und sie völlig erschöpfet. So erschöpfet dasjenige die Formul $x + \surd(xx-1)$ bey weitem nicht, was Hr. d'Alenbert auf der 215 und 216 S. der Opuscules davon saget: und wenn Hr. d'Alenbert behauptet, daß die hyperbolischen Ausschnitte, wenn $-x > -1$ genommen wird, wieder möglich werden, so muß ich dieß schlechterdings läugnen, es sey denn, daß man sie von B an rechnet, und also für $x = -1$ wieder $= 0$ setzt: aber dann sind sie die Logarithmen von $\frac{-x + \surd xx - 1}{-1} = + x \mp \surd(xx-1)$, und keinesweges die Logarithmen von $- x \pm \surd(xx-1)$.

§. 30.

Man kann die Gleichung Sect. Absc. $x = l x + \surd(xx-1)$ überhaupt so ausdrücken $\rho\surd-1 = l(\cos\rho \pm \sin\rho\surd-1)$, dann wird $\cos\rho$ unmöglich als Absciße des Zirkels, aber eine mögliche Absciße der Hyperbel, wenn $\cos\rho > \pm 1$ genommen wird. Zugleich wird $\sin\rho$ sowohl, als der Ausschnitt ρ selbst unmöglich, aber $\sin\rho\surd-1$ wird eine mögliche Ordinate und $\rho\surd-1$ ein möglicher Ausschnitt der Hyperbel. Diese Gleichung braucht Herr Foncenex. Allein Hr. d'Alenbert ist damit auf der 217 u. f. Seite gar nicht zufrieden. Inzwischen fallen nunmehro die Zweifel, so er dagegen macht, alle von selbst weg. Sie sind durch die vorhergehende Verzeichnung alle beantwortet, diese zeiget, daß man sowohl

eine

eine Idée nette, als auch exacte (wie Herr d'Alenbert sich ausdrückt, von einem unmöglichen Zirkelbogen haben könne. Es hat seine unstreitige Richtigkeit, daß $\rho\sqrt{-1}$ den hyperbolischen Ausschnitt allemal bezeichne, und so, wie es gewiß ist, daß $\rho\sqrt{-1}$ unzählige Werthe habe, wenn $x = \pm 1$; so ist es auch gewiß, daß der hyperbolische Ausschnitt in eben den Fällen unzählige Werthe habe, und es ist höchst unrichtig, daß der hyperbolische Ausschnitt $= 0$ sey, wenn $x = -1$. Es ist ferner unrichtig, daß $\rho\sqrt{-1}$ wieder möglich werde, wenn man $x > -1$ nimmt, denn die Bogen oder Winkel ρ werden von A angerechnet, und für $x = -Cp$, bestehet ρ aus einem möglichen Stück $\pm$ AEB, oder überhaupt $\pm(2\lambda+1)\pi$, und einem unmöglichen Winkel BCn, oder BCm; daher besteht auch $\rho\sqrt{-1}$ aus einem unmöglichen und einem möglichen Stück, deren Summe gewiß unmöglich ist. Für $+x > +1$ hat $\rho\sqrt{-1}$ deswegen einen möglichen Werth, weil der Winkel ACM unmöglich, und dieß einer von denen ist, welche ρ in dieser Voraussetzung bedeutet.

§. 31.

Die hyperbolischen Trapezien lassen sich bey dieser Verzeichnung so bequem nicht, wie die Ausschnitte, gebrauchen: und bey Verzeichnung der Logarithmen unmöglicher Größen dienen sie gar nicht. Dieß rühret daher, weil in dem unmöglichen Stück der Hyperbel, dem Zirkel nämlich, die Gleichheit der Ausschnitte, und der ihnen respondirenden Trapezien wegfällt; denn in dem Zirkel ist das sogenannte Parallelogrammum inscriptum nicht mehr von beständiger Größe. Wenn man inzwischen die Trapezien gebrauchen will, so weit es angehet, so bestätigen sie alles dasjenige, was vermittelst der Ausschnitte gefunden wird. Es sey, wie sonst gewöhnlich ist, AD = CD = 1 gesetzt, so ist AC = $\sqrt{2}$,

und $ADKM = l\frac{CK}{CD} = lCK$. Wenn $CK = t$, und $km = u$; so schließt man jene Gleichung daraus, weil $d. ADKM = \frac{dt}{t}$ ist; aber eben dieß Differential gehöret zu allen Trapezien, die zwischen DK, AD, MK, und den Bogen fallen, der sich von A nach M erstreckt. Also gehört hieher auch das Trapezium

$$ADI + IEBL + LHAD, ADKM$$

und überhaupt

$$\lambda. (ADI + IEBL + LHAD) + ADKM.$$

Ferner: $ADHL + LBEI + IDA + ADKM.$
und überhaupt

$$\lambda (ADHL + LBEF + IDA) + ADKM.$$

Da aber nunmehro die Peripherie des Zirkels, welcher das unmögliche Stück der Hyperbel ausmacht, $= 2\pi\sqrt{2}\sqrt{-1}$ und also die Fläche desselben $ADI + IEBL + LHAD = 2\pi\sqrt{2}\sqrt{-1} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\pi\sqrt{-1}$ ist, so wird eigentlich das Trapez. Absc. $t = ADKM \pm 2\lambda\pi.\sqrt{-1}$. Nimmt man $-Ck$ statt CK, so ist das Trapez. Absc. $-t$ keineswegs $= Bdnm$, wenn die Voraussetzung bleibt, daß das Integral $\int\frac{dt}{t} = o$ seyn soll, wenn $t = +1$ ist. Soll das Trapz. Absc. $t = Bdkm$ seyn können, so muß das Integral $\int\frac{dt}{t} = o$ seyn, wenn $t = -1$ ist. Dann aber wird Trapez. Absc. $-t = l-t-l-1 = l\frac{-t}{-1} = l+t$. Aber in der Voraussetzung, daß das Integral nur $= o$ sey, wann $t = +1$ ist, welche nicht geändert werden darf, hat das Trapez. Absc. $-t$ folgende Werthe

$$ADI + IEBd + Bdkm,$$

$$ADI + IEBd + BdL + LHAI + IEBd + Bdkm, \text{ u. s. f.}$$

ingleichen

CAHL

$DAHL + LdB + Bdkm$

$DAHL + LdB + dBEI + IAHL + LdB + BDkm$, u. s. f.

oder überhaupt diese $(2\lambda+1)\pi\sqrt{-1} + Bdkm = (2\lambda+1)\pi\sqrt{-1} + l+t$.

§. 32.

So leidet es also wohl weiter gar keinen Zweifel, daß dasjenige seine Richtigkeit habe, was ich am Ende des §. 2. behauptet habe. Zwischen jeden zwenen mit der Asymtote xy parallelen Ordinaten fällt eine mögliche Fläche der Hyperbel, dafern beyde Ordinaten auf einer und eben derselben Seite der Asymtote xy liegen. Aber jede Fläche der Hyperbel ist unmöglich, die zwischen zween solchen Ordinaten fällt, davon die eine auf der einen, die andere auf der andern Seite der Asymtote xy liegt, dergleichen AD und mk sind. Es wird nämlich vorausgesetzt, daß die Fläche zwischen den beyden parallelen Ordinaten AD und mk, dem Stück der Abscisse Dk, und demjenigen Bogen der Hyperbel enthalten sey, der sich von A nach m erstreckt: aber von A nach m erstreckt sich gar kein möglicher Bogen der Hyperbel. Wenn man sich, wie gewöhnlich die Vorstellung macht, der Bogen werde beschrieben, indem der Punct A von A nach m vorgehet, so ist es schlechterdings unmöglich, daß A durch den möglichen Ast AN fortgehen, niemal aus diesem Ast durch einen ununterbrochnen möglichen Weg in den Ast Bn hinein kommen, und sodann durch B nach m hin gelangen könne. Weil nämlich die Aeste AN und Bn auf entgegengesetzten Seiten der Asymtote xy liegen, und längst den entgegengesetzten Stücken derselben Cx, Cy sich bis ins unendliche erstrecken, so ist es schlechterdings unmöglich, daß sie einmal zusammen stossen könnten. Ich denke nicht, daß man sagen werde, sie stossen im unendlichen zusammen, das wäre eben so ungereimt, als wenn man sagen wollte, die beyden entgegengesetzten Stücke Cx und Cy der graden Linie

xy, wenn man sie nach beyden entgegengesetzten Seite verlängnete, müßten einmal im unendlichen im x und y zusammen stossen. Es ist gar kein möglicher Weg von A nach m zu kommen, wenn der Punct A in der Hyperbel bleiben soll. Inzwischen verbindet die Gleichung der Hyperbel die beyden entgegengesetzten Stücke derselben MAN, mBn, vermittelst des Zirkels AEBF, und macht denselben zu einem unmöglichen Stück der Hyperbel. Dieserwegen kann A in der Peripherie des Zirkels fortgehen, und auf die Art durch B nach m hinkommen, weil aber der Weg, welchen A auf solche Art nehmen muß, aus einem unmöglichen und möglichen Stück der Hyperbel bestehet, so ist doch allemal der Bogen der Hyperbel von A bis m ein unmöglicher Bogen, und diesemnach sowohl das Trapezium zwischen AD und mk, als auch der Ausschnitt zwischen CA und Cm eine **unmögliche Fläche der Hyperbel.**



Theorie

Theorie
von den
Projectionen der Kugel
zum
astronomischen und geographischen Gebrauch
von
W. J. G. Karsten
1766.



1 §.

Unter den besondern Vorwürfen, womit sich die ausübende Mathematik beschäftiget, ist zwar vieleicht keiner mehr übrig, worauf man die Analysin nicht bereits angewandt, und eben dadurch diese Wissenschaft zu einem neuen Grad der Vollkommenheit gebracht hätte. Inzwischen scheint es, daß man bey einigen sich bisher begnügt habe, nur zu zeigen, wie sich die Analysis darauf anwenden ließe, ohne der Theorie die gehörige Vollständigkeit zu geben, damit ihr Nutzen in der Ausübung unmittelbar in die Augen leuchte. Es ist gewiß, daß sich ganze Wissenschaften durch Hülfe analytischer Kunstgriffe auf sehr wenige allgemeine Formuln bringen lassen, die ein Meister in der Kunst allemal ohne große Schwierigkeit weiter entwickeln kann. Allein man kann doch nicht sagen, daß die Formuln schon brauchbar gemacht sind, bevor alle besondre in der Ausübung dienliche Regeln daraus sind hergeleitet worden. Man muß den ganzen Zusammenhang aller speciellen Fälle mit der allgemeinen Theorie zeigen, wenn die leztere für die Ausübung nutzbar werden soll. Diejenigen, welche sich mit der Ausübung beschäftigen, sind nur selten mit den nöthigen Känntnissen versehen, welche erfordert werden, die practischen speciellen Regeln aus der allgemeinen Theorie herzuleiten. Dadurch wird der Werth einer an sich schö-

nen

nen Theorie allemal erhöhet, wenn sie auf leichte und vortheilhafte Regeln für die Ausübung leitet.

2 §.

Die mancherley Arten, eine Kugel mit ihren Kreisen, die der Astronom und Geograph darauf verzeichnet, auf einer Ebene perspectivisch abzubilden, sind den Alten lange bekannt gewesen, bevor die Analysis zu der heutigen Vollkommenheit ist gebracht worden. Sie nannten diese Abbildungen Planisphæria, auch Astrolabia. Jetzt ist der Name der Projectionen am gewöhnlichsten. Man bedient sich ihrer häufig sowohl in der Astronomie, als Geographie, und die Verzeichnung der geographischen Charten ist ein wichtiges Stück in der Ausübung, bey dem diese Projectionen gebraucht werden. Unter den mancherley Arten diese Projectionen der Kugel zu zeichnen, sind vornehmlich folgende zwo merkwürdig. Die Tafel ist die Ebene eines größten Kreises der Kugel, und das Auge stehet in der Axe desselben. Nachdem man nun entweder voraussetzt, daß das Auge unendlich weit, oder nur um den Halbmesser der Kugel von der Tafel entfernt sey, nachdem heißt die Projection **orthographisch** oder **stereographisch**. Jene hat man beständig in der Astronomie gebraucht, die Erde abzubilden, bey den Verzeichnungen der Sonnenfinsternisse, und andrer ähnlicher Erscheinungen am Himmel; bis Herr **Lambert** nur im vorigen Jahr gewiesen hat, daß man sich hier der stereographischen Projection weit vortheilhafter bedienen könne, in seiner Beschreibung und Gebrauch einer neuen eccliptischen Tafel: nachdem der unter den deutschen Geographen so berühmte Herr **Hase** bereits eben den Gedanken gehabt, und überhaupt die Vorzüge dieser Projectionsart angezeigt hatte, in der Sciographia integri tractatus de constructione mapparum omnis generis Geographicarum, Hydrographicarum & Astronomicarum, Lipſ. 1717. Die Schrift

selbst,

selbst, wovon Hr. Hase hier den Abriß liefert, ist nie gedruckt worden, und es fehlet bis jetzt noch an einer vollständigen Ausführung dieser Theorie zum unmittelbaren Gebrauch in der Ausübung. Hr. v. Wolf trägt im IV Tomo seiner Element. Math. im IX Cap. der Geographie nur den leichtesten Fall davon vor.

3 §.

Das wichtigste, was von dieser Theorie seit der Zeit öffentlich bekannt geworden, ist ohne Zweifel die kaestnerische Ausführung in dem zu Leipzig herausgegebenen Programma: Perspectivæ & projectionum Theoriæ generalis analytica, welche der berühmte Hr. Verfasser auch nachher seiner deutschen Ausgabe von Smiths Optik angehängt hat. Allein dieser große Geometer begnügt sich damit, die Theorie im Allgemeinen ausgeführt zu haben, und macht nur eine kurze Anwendung auf den in den wolfischen Elementis gleichfalls berührten Fall der stereographischen Projection, nebst noch zween andern Fällen, da die Tafel die Kugel berührt. Ich glaube daher, daß es der Mühe nicht unwerth sey, diese allgemeine Theorie der Ausübung näher zu bringen. Bey Entwickelung der allgemeinen Theorie werde ich in der Hauptsache der Ausführung des Hrn. Kaestners folgen, jedoch mit einiger Veränderung der Formuln, um dadurch die Anwendung auf die speciellen Fälle desto mehr zu erleichtern.

Allgemeine Theorie der Projectionen.

4 §.

Wenn zwischen einer Sache LM (1 Fig.) und dem Auge O eine durchsichtige Ebene, oder die Tafel CD stehet, so werden alle Stralen, die von jedem Punct der Sache M, L, u. s. f. ins Auge O kommen, die Tafel in den so vielen Puncten I, K, u. s. f.

durchboren. Das Auge hat einerley Empfindung, ob es die Stralen uumittelbar von der Sache LM, oder von den zugehörigen Puncten I, K, u. s. f. der Tafel empfängt. Deswegen heißt ein jeder Punct K, in welchem der Stral LO durch die Tafel ins Auge gehet, das **Bild** oder die **Projection** des Puncts L, und alle Puncte I, K, u. s. f. zusammen machen das Bild der Sache LM auf der Tafel aus.

5 §.

Wird die Ebene der Tafel CD von einer andern Ebene AB in der graden Linie CE senkrecht geschnitten, so heißt diese Ebene AB die Fundamentalebene, wovon man gemeiniglich annimmt, daß sie horizontal sey. Ihre Durchschnittslinie CE mit der Tafel heißt die **Fundamentallinie**. Dafern nun auf der Tafel die Fundamentallinie gegeben ist, und in derselben ein bekannter Punct C, so läßt sich die Lage des Auges O gegen die Tafel auf folgende Art bestimmen. Vom Auge O sey OS auf die Fundamentalebene senkrecht gezogen, und von S die Linie ST auf der Fundamentallinie, also auch auf der Tafel lothrecht. Wenn nun die Größe der dreyen Linien CT, ST, SO bekannt ist, so ist die Lage des Auges gegen die Tafel bekannt. Man lege durch OST eine Ebene OSTR, welche die Tafel in TR schneidet, so ist auch diese Ebene auf der Tafel und der Fundamentalebene senkrecht. Sie kann die Ebene des Auges heißen. Also ist RT auf der Ebene AB folglich auf ST senkrecht. Man ziehe OR auf RT also auf der Tafel senkrecht, so wird nun OS der Abstand des Auges von der Fundamentalebene, oder die **Höhe** des Auges, ST = OR der Abstand des Auges von der Tafel, CT der Abstand der Ebene des Auges von dem bekannten Punct C in der Fundamentallinie. Wenn die Lage der Ebene des Auges sonst schon bekannt ist, so braucht man CT nicht zur Bestimmung der Lage des

Au-

Auges, sondern nur OS und ST, da dann der Punct R, wo die Distanz des Auges die Tafel trift, der Augenpunct heißt.

6 §.

Wenn ein Punct M in der Fundamentalebene liegt, so bestimmt man seine Lage gegen die Tafel auf folgende Art. Von M sey MN auf der Fundamentallinie senkrecht gezogen: dieß wird der Abstand des Puncts M von der Tafel seyn. Weis man nun die Größe der Linien CN und CM, so ist die Lage des Puncts M gegen die Tafel bekannt. Und wenn die Lage der Ebene des Auges als bekannt angenommen wird, so ist die Lage des Puncts M bestimmt, wenn man TN und MN kennet. Geht nun der Lichtstral MO durch die Tafel in I, so daß I das Bild des Puncts M ist, so sey IW auf der Fundamentallinie senkrecht. Kennet man nun CW und WI, oder auch TW und WI, so ist die Lage des Bildes I auf der Tafel bekannt. Wäre L ein Punct außer der Fundamentalebene, so bedarf man dreyer Linien zur Bestimmung seiner Lage gegen die Tafel. Es sey nämlich LM auf der Fundamentalebene und MN auf der Fundamentallinie senkrecht, so ist die Lage des Puncts L bestimmt, wenn man CN oder TN, ferner NM und ML kennet. Zur Bestimmung der Lage des Bildes K auf der Tafel werden nur zwo Linien CW oder TW und WK erfordert, wenn KW auf der Fundamentallinie senkrecht ist.

7 §.

Die Lage des Auges *O* (1 Fig.) gegen die Tafel, und die Lage des Punets *M* in der Horizontalebene sind gegeben; man soll das Bild *I* auf der Tafel finden.

Aufl. Wenn die Voraussetzungen des 5 und 6 §. bleiben, so ist IW auf CW senkrecht, also auch auf der Ebene AB,

und deswegen sind IW und OS parallel. Die Ebene OSWI dieser Parallelen schneidet AB in der graden Linie SW; und weil M in der graden Linie OI liegt, so muß dieser Punct M in beyden Ebenen OSWI und AB zugleich, folglich in der verlängerten Durchschnittslinie SW liegen. Nun ist das Dreyeck MWNSTW, also $MW:MN = WS:ST$, und $MW + WS:MN + ST = MW:MN$, oder $MS:MW = MN + ST:MN$. Aber auch $MS:MW = OS:IW$, also 1) $MN + ST:MN = OS:IW$. Ferner ist $TW:TS = WN:MN$, also $TN:TS + MN = TW:TS$, oder auch 2) $CN - CT:TS + MN = TW:TS$. Es sey nun $OS = a$, $ST = \delta$, $CT = e$, $CN = f$, $MN = d$, so wird 1) $d + \delta : d = a : IW$, und 2) $f - e : d + \delta = TW.\delta$: also ist 1) $IW = \frac{ad}{d+\delta}$, und 2) $TW = \frac{(f-e)\delta}{d+\delta}$. Wenn der Punct T selbst unmittelbar bekannt ist, so ist es soviel, als wenn C mit T zusammen fiele, oder $T = e = 0$ wäre. Dann ist $TN = f$, und $CW = TW = \frac{f\delta}{d+\delta}$.

8 §.

Die Lage des Puncts *L* (1 Fig.) über der Fundamentalebene ist gegeben, man soll seine Projection *K* auf der Tafel finden.

Aufl. Man setze die senkrechte Linie $LM = \alpha$, und suche des Puncts M Projection I. Weil nämlich KW auf der Fundamentallinie, also auf der Ebene AB senkrecht ist, so sind OS, KW parallel; in der Ebene SOKW dieser Parallelen liegt OK, also auch L, und folglich LM, weil auch LM mit OS und KW parallel ist. Also liegt M wieder in der verlängerten Durchschnittslinie SW: und weil OM in der Ebene SOLM liegt, so wird KW von CM irgendwo in I geschnitten, so daß I des Puncts M Projection

jection ist. Bleiben demnach die Bezeichnungen des vorigen §. so ist $CW = \frac{(f-e)\delta}{d+\delta}$, und $Wf = \frac{ad}{d+\delta}$. Deswegen darf nur noch IK gesucht werden. Da dann IK dasjenige ist, was sonst die perspectivische Höhe des Puncts L heißt, dessen wahre Höhe LM ist. Nun hat man aus der Proportion $MW : MN = WS : ST$ (7 §.) auch diese $MS : MN + ST = WS : ST$. Ferner $MS : WS = OM : OI$, und $OM : OI = LM : IK$, also wird $MN + ST : ST = LM : IK$, und $IK = \frac{\alpha\delta}{d+\delta}$, folglich $WK = WI + IK = \frac{ad+\alpha\delta}{d+\delta}$.

9 §.

Es ist die Lage der Ebene *XY* (2 Fig.) gegen die Fundamentalebene *AB*, also auch gegen die Tafel *CD* gegeben; in dieser Ebene *XY* ist eine krumme Linie *Lm* verzeichnet, und ihre Natur durch eine Gleichung zwischen rechtwinklichten Ordinaten bekannt, so daß die Durchschnittslinie *XF* die Abscissenlinie ist; die Lage des Auges gegen die Tafel ist gleichfalls gegeben: man soll eine Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten für die Projection *Kn* der Linie *Lm* suchen, so daß die Abscissen auf der Fundamentallinie genommen werden.

Aufl. Die Lage der Ebene XY gegen die Ebene AB muß auf folgende Art bestimmt seyn. Man setze ihre Durchschnittslinie Ff mit der Ebene AB stoße verlängert mit der Fundamentallinie in H zusammen, und schneide die Fundamentallinie unter dem Winkel $FHT = \eta$. Ueberdem sey der Neigungswinkel der Ebene XY gegen die Fundamentalebene $AB = d$. Weil nun die Lage der Ebene des Auges bekannt ist, so ist T ein bekannter Punct in der Fundamentallinie. Dafern also die Linie TH nebst den

Winkeln η und d bekannt ist, so ist die Lage der Ebene XY völlig bekannt. Man ziehe ferner LF auf auf XF senkrecht, so wird LF eine rechtwinklichte Applicate der Linie Lm für Abscissen, die man auf der Axe XY von einem bekannten Punct rechnet. Ein solcher Punct, den man hiezu erwählen kann, ist bekannt, wenn von T auf XF die Linie TE senkrecht gezogen wird. Denn man setze HT $= b$, so ist ET $= b\sin\eta$, und HE $= b\cos\eta$, daß also des Puncts E Entfernung von H bekannt ist. Weil nun auch der Anfangspunct der Abscissen der Linie Lm durch seinen Abstand von H gegeben seyn muß, so ist auch der Abstand dieses Puncts von E bekannt, und man kann die Gleichung der Linie Lm leicht so einrichten, daß E der Anfangspunct der Abscissen wird. Wenn nun EF $= x$, FL $= y$ ist, so hat man eine Gleichung zwischen x und y. Nun sey K des Puncts L Projection, und KW auf der Fundamentallinie senkrecht, so ist WK eine rechtwinklichte Ordinate für die Linie Kn, wenn die Abscissen auf der Fundamentallinie von einem bekannten Punct genommen werden. Für diesen Punct kann man T nehmen, so daß die Sache nun darauf ankommt, eine Gleichung zwischen TW und WK zu finden. Setzt man demnach TW $= t$, WK $= u$, so muß man ein paar Gleichungen suchen, welche x und y durch t und u ausdrücken. Wenn man hiernächst diese Werthe statt x und y in der Gleichung der Linie Lm setzt, so hat man die gesuchte Gleichung zwischen t und u.

Um nun zu finden, wie t und u von x und y abhängen, darf man nur folgendes in Erwegung ziehen. Es sey LM auf der Ebene AB, und MN auf der Fundamentallinie senkrecht; so siehet man leicht, daß TN, NM, ML durch TE, EF, FL, und den Winkel d bestimmt werden. Wie aber TW $= t$, und WK $= u$ von TN, NM, ML abhängen, ist aus dem vorigen 7 u. 8 §. bekannt. Setzt man demnach TN $= f$, NM $= d$, und ML $= \alpha$, so ist

$t=$

$t = \frac{f\delta}{d+\delta}$, und $u = \frac{ad+\alpha\delta}{d+\delta}$. Also darf man nur f, d, und α durch TE, EF, FL und d suchen. Zieht man aber MF so ist MFL $= d$, und man hat 1) $\alpha = y \sin d$, daß also nur noch d und f zu suchen sind. In solcher Absicht sey FR mit MN parallel, also auf TN senkrecht gezogen, FG aber sey mit TN parallel, und schneide MN in G, so wird FRNG ein Rechteck, und überdem das Dreyeck FHR bey R rechtwinklicht. Weil ferner FM mit TE und FG mit TH als der verlängerten TN parallel ist, so wird MFG $=$ HTE $= 90° - \eta$, also FMG $=$ EHT $= \eta$. Demnach ist MG $=$ MF $\cos\eta$, und FG $=$ MF $\sin\eta$. Aber MF $= y\cos d$, also MG $= y\cos d \cos\eta$, und FG $= y\cos d \sin d =$ NR, ferner GN $=$ MN $+$ MG $= d + y\cos d \cos\eta$. Aber im Dreyeck FHR hat man FR $=$ HF $\sin\eta$, und HF $= b\cos\eta + x$, also FR $= b\sin\eta\cos\eta + x\sin\eta =$ PN. Vorhin war GN $= d + y\cos d \cos\eta$, also erhält man $d + y\cos d\cos\eta = b\sin\eta\cos\eta + x\sin\eta$, und dieß giebt 2) $d = b\sin\eta\cos\eta + x\sin\eta - y\cos d\cos\eta$. Auf ähnliche Art ergiebt sich f. Denn im rechtwinklichten Dreyeck FHR ist auch HR $=$ HF $\cos\eta = b\cos\eta^2 + x\cos\eta$, und NR $=$ HT $+$ TN $-$ HR $= b + f - b\cos\eta^2 - x\cos\eta$. Vorhin war NR $= y\cos d\sin\eta$, also wird $b + f - b\cos\eta^2 - x\cos\eta = y\cos d\sin\eta$, oder $f + b\sin\eta^2 - x\cos\eta = y\cos d\sin\eta$. Daraus folgt 3) $f = y\cos d\sin\eta - b\sin\eta^2 + x\cos\eta$. Setzt man nun die gefundenen drey Werthe statt α, d und f in den beyden Gleichungen $t = \frac{f\delta}{d+\delta}$ und $u = \frac{ad+\alpha\delta}{d+\delta}$, so hat man t und u durch x und y, folglich auch umgekehrt x und y durch t und u. Es wird nämlich

$$t = \frac{\delta y\cos d\sin\eta - b\delta\sin\eta^2 + \delta x\cos\eta}{b\sin\eta\cos\eta + x\sin\eta - y\cos d\cos\eta + \delta}$$

$$u = \frac{ab\sin\eta\cos\eta + ax\sin\eta - ay\cos d\cos\eta + \delta y\sin d.}{b\sin\eta\cos\eta + x\sin\eta - y\cos d\cos\eta + \delta.}$$

Man

Man schaffe aus diesen beyden Gleichungen zuerst y weg, so giebt die erste:

$$bt\sin\eta\cos\eta + xt\sin\eta - yt\cos d\cos\eta + \delta t - \delta y\cos d\sin\eta + b\delta\sin\eta^2 - \delta x\cos\eta = 0$$

und die zweyte

$$vu\sin\eta\cos\eta + xu\sin\eta - yu\cos d\cos\eta + \delta u - ab\sin\eta\cos\eta - ax\sin\eta + ay\cos d\cos\eta - \delta y\sin d = 0.$$

Diese Gleichungen kann man so ordnen:

$$(t\cos d\cos\eta + \delta\cos d\sin\eta)\,y + \delta x\cos\eta - b\delta\sin\eta^2 - \delta t - xt\sin\eta - bt\sin\eta\cos\eta = 0,$$

$$(a\cos d\cos\eta - u\cos d\cos\eta - \delta\sin d)\,y + bu\sin\eta\cos\eta + xu\sin\eta + \delta u - ab\sin\eta\cos\eta - ax\sin\eta = 0.$$

Man multiplicire die erste mit $a\cos d\cos\eta - u\cos d\cos\eta - \delta\sin d$, die zweyte mit $t\cos d\cos\eta + \delta\cos d\sin\eta$ und subtrahire die letzte von der ersten, so wird

$$(\delta x\cos\eta - b\delta\sin\eta^2 - \delta t - xt\sin\eta - bt\sin\eta\cos\eta)(a\cos d\cos\eta - u\cos d\cos\eta - \delta\sin d)$$

$$-(bu\sin\eta\cos\eta + ux\sin\eta + \delta u - ab\sin\eta\cos\eta - ax\sin\eta) \times (t\cos d\cos\eta + \delta\cos d\sin\eta) = 0.$$

Hieraus folgt nach angestellter Rechnung

$$a\delta x\cos d - a\delta t\cos d\cos\eta - \delta ux\cos d - \delta\delta x\cos\eta\sin d + b\delta\delta\sin\eta^2\sin d$$
$$+\delta\delta t\sin d + \delta xt\sin\eta\sin d + b\delta t\sin\eta\cos\eta\sin d - \delta\delta u\cos d\sin\eta = 0.$$

Also erhält man

$$x = \frac{at\cos d\cos\eta - b\delta\sin\eta^2\sin d - \delta t\sin d - bt\sin\eta\cos\eta\sin d + \delta u\cos d\sin\eta}{a\cos d - u\cos d - \delta\cos\eta\sin d + t\sin\eta\sin d},$$

oder auch

$$x = \frac{\delta u\sin\eta\cot d + (a\cot d\cos\eta - b\sin\eta\cos\eta - \delta)\,t - b\delta\sin\eta^2}{t\sin\eta - u\cot d + a\cot d - \delta\cos\eta},$$

wenn

wenn man nämlich Zehler und Nenner jenes Bruchs durch $\sin d$ dividirt, und dann alles nach t und u ordnet. Substituirt man dieses in einer der beyden vorigen Gleichungen zwischen x und y, so erhält man auch y durch t und u ausgedrückt. Es war aber

$$(t\cos d\cos\eta+\delta\cos d\sin\eta)y=(t\sin\eta-\delta\cos\eta)x+\delta t+b\delta\sin\eta^2+bt\sin\eta\cos\eta,$$

also $y=\dfrac{t\sin\eta-\delta\cos\eta}{t\cos d\cos\eta+\delta\cos d\sin\eta}x+\dfrac{\delta t+b\delta\sin\eta^2+bt\sin\eta\cos\eta}{t\cos d\cos\eta+\delta\cos d\sin\eta}$

In diese Gleichung setze man den ersten Werth von x und bringe beyde Brüche, die nun y ausdrücken, auf gleiche Benennung, so wird der Zehler des neuen Bruchs, der y ausdrückt

$$=att\cos d\cos\eta\sin\eta-\delta tu\cos d\cos\eta^2+a\delta t\cos d\sin\eta^2-\delta\delta u\cos d\sin\eta\cos\eta$$
$$+ab\delta\cos d\sin\eta^2-b\delta u\cos d\sin\eta^2+abt\cos d\sin\eta\cos\eta-btu\cos d\sin\eta\cos\eta.$$

Dieser Zehler läßt sich durch den Factor $t\cos d\cos\eta+\delta\cos d\sin\eta$ des Nenners dividiren, und der Quotient wird $=at\sin\eta-bu\sin\eta-\delta u\cos\eta+ab\sin\eta$. Deswegen wird

$$y=\frac{at\sin\eta-(b\sin\eta+\delta\cos\eta)u+ab\sin\eta}{t\sin\eta\sin d-u\cos d+a\cos d-\delta\cos\eta\sin d.}$$

10 §.

Die vornehmsten besondern Fälle, bey welchen diese Aufgabe ihre Anwendung findet, sind folgende. Wenn das Auge in der Fundamentalebene stehet, so ist $a=0$,

also $x=\dfrac{\delta u\sin\eta\cot d-(b\sin\eta\cos\eta+\delta)t-b\delta\sin\eta^2,}{t\sin\eta-u\cot d-\delta\cos\eta}$

und $y=\dfrac{(b\sin\eta+\delta\cos\eta)u}{u\cos d-t\sin\eta\sin d+\delta\cos\eta\sin d.}$

Für die orthographische Projection ist überdem $\delta=\infty$, also in diesem Fall $x=\dfrac{t+b\sin\eta^2-u\sin\eta\cot d,}{\cos\eta}$ oder $x=t\sec\eta+b\tan\eta\sin\eta-u\tan\eta\cot d$, und $y=\dfrac{u}{\sin d.}$

11 §.

Wenn FH mit NH parallel ist, (3 Fig.) so wird $b=x$, und $\eta=0$, $\sin\eta=0$, $\cos\eta=1$. Sodann aber kann $b\sin\eta=\infty\,0$ jede gegebene beständige Größe bedeuten, weil dieß nun der Abstand der Parallele FH von NH wird. Man setze TE $=c$, so ist $c=b\sin\eta$, auch noch wenn $b=\infty$, und $\eta=0$ ist. Also wird in diesem Fall $x=\frac{(a\cot d-c-\delta)\,t}{a\cot d-u\cot d-\delta}$, oder auch $x=\frac{(a\cos d-c\sin d-\delta\sin d)\,t}{a\cos d-u\cos d-\delta\sin d}$, und $y=\frac{ac-(c+\delta)\,u}{ac\cos d-u\cos d-\delta\sin d}$. Für die orthographische Projection wird aus dem 10 §. $x=t$, und $y=\frac{u}{\sin d}$.

12 §.

Wenn die Ebene XY (3 Fig.) mit der Fundamentalebene parallel ist, so giebt es keine Durchschnittslinie FH, worauf man die Abscissen EF nehmen könnte. Um nun die Formuln so zu verändern, daß sie sich auch auf diesen Fall anwenden lassen, setze man die Ebene XY schneide die Tafel in De, die Fundamentalebene aber in FH, so daß FH mit TH parallel ist, damit die Formuln des vorigen §. gelten. Wenn nun Ee und Ff auf De senkrecht sind, und man ziehet eTfR, so ist EeT $=$ FfR der Ebene XY Neigungswinkel gegen die Tafel. Und da die Ebenen ETe, FRf auf TH folglich auch auf der Parallele FH senkrecht sind, so ist TEe $=$ RF$f=d$ der Ebene XY Neigungswinkel gegen AB, und man hat EF $=x$, $=ef$, und FL $=y=$ F$f-f$L. Man setze Te $=$ R$f=e$, und Ee $=$ F$f=f$, so ist $c=\frac{e\cos d}{\sin d}=f\cos d$, und $e=f\sin d$. Wenn nun die Natur der Linie Lm durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten $ef=x$, fL $=z$ ausgedruckt ist; so wird

$x=$

$x = \frac{a\cos d - e\cos d - \delta\sin d}{a\cos d - u\cos d - \delta\sin d}$, und $z = f - y = \frac{\delta(u-e)}{a\cos d - u\cos d - \delta\sin d}$.
Nun drehe sich die Ebene XY um De bis in die Lage DZ mit AB parallel, so wird $d = o$, $\sin d = o$, $\cos d = 1$, also $x = \frac{(a-e)t}{a-u}$, und $z = \frac{\delta(u-e)}{a-u}$. Wenn man eben die Veränderung mit den Formuln für die orthographische Projection im vorigen §. vornimmt, so erhält man $x = t$, und $f - z = \frac{u}{\sin d}$, also $e - z\sin d = u$, und $z = \frac{e-u}{\sin d}$. Für die parallele Lage, wenn $\sin d = o$, wird $z = \frac{e-o}{u}$.
Dieser Ausdruck scheint zwar unendlich zu werden; weil aber z unbestimmt seyn muß, so kann die Gleichung nicht bestehen, dafern nicht auch $e - u = o$ also $z = \frac{o}{o}$, und folglich $u = e$ ist. Dieß letztere ist nun schon die Gleichung für die Projection, und es erhellet leicht, daß in diesem Fall die Projection die grade Linie De seyn müsse, die mit TW in der Entfernung $Te = e$ parallel liegt. Denn es ist so gut, als ob das Auge in der Ebene DZ selbst stehe, weil alle durch die Puncte von Lm mit ST parallele Linien in der Ebene DZ fallen.

13 §.

Man setze der Winkel η, (4 Fig.) der in der 2 Figur spitzig angenommen ist, wachse, indem sich die Linie FH und F herum drehet, und H gegen T zugehet; so wird H in R fallen, wenn η ein rechter Winkel ist, und es wird $TH = b$ nun negativ und $= c$, so wie $\sin\eta = 1$ und $\cos\eta = o$ wird. Also ist in diesem Fall

$$x = \frac{\delta u\cot d - \delta t + b\delta}{t - u\cot d + a\cot d}$$

 y=

$$y = \frac{t\sin d - u\cos d + a\cos d.}{at + bu - ab}$$

Für die orthographische Projection erhält man $x = \frac{t - c - u\cot d,}{o}$ und $y = \frac{u}{\sin d}$. Der Werth von x kann wiederum nicht unendlich seyn, also muß $t - c - u\cot d = o$ seyn, und dieß ist wiederum schon die Gleichung für die Projection selbst, welche keine andre als eine grade Linie seyn kann, weil es nun so gut ist, als wenn die Ebene der Linie Lm durchs Auge gehet.

Es steht nämlich nun LK auf der Tafel senkrecht, und die Ebene XY auch, also liegt LK und jeder andre Lichtstral in der Ebene XY, und alle diese Lichtstralen sind mit OT parallel. Die Puncte H, E und R fallen zusammen, so daß TH = TE = TR $= b = c$ wird. Wenn nun die Ebene XY die Tafel in KR schneidet, so ist FRK $= 90° =$ LFR, also FL mit HK parallel. Die Ebene KLM steht auf der Fundamentalebene AB senkrecht: wenn jene also die Tafel in KN schneidet, so ist KN auf TN senkrecht, so daß W und N zusammen fallen. Demnach wird $t =$ TW=TN, $u =$ WK=NK, und HK=TL$= y$, EF=RF$= x$. Nun ist der Winkel KRM = LFM $= d$, und KW = LG $= y\sin d = u$. Ueberdem HN $= y\cos d$, also TN = TH + HN oder $t = c + y\cos d$, und wenn man $y = \frac{u}{\sin d}$ substituirt, so wird $t = c + u\cot d$, oder $4 - c - u\cot d = o$, wie vorhin.

Anwendung der bisherigen Theorie auf die Projectionen der Kugel.

14 §.

Die Tafel sey der Aequator ÆQ, (5 Fig.) sein Halbmesser $= r$, und das Auge o stehe in einem Pol des Aequators.

tors. Die Fundamentalebene sey ein Meridian, der von einem andern Meridian OLP unter einem gegebenen Winkel LOC geschnitten wird; man sucht die Projection des Meridians OLP.

Aufl. Die Puncte E und H fallen hier in t zusammen, weil FX durch T gehet, und es ist $\eta = 90°$, $a = o$, $b = c = o$, $\delta = r$. Wenn man nun im 13 §. wo bereits $\eta = 90°$ gesetzt ist, nach $b = o$, $a = o$, und $\delta = r$ setzt, so wird $x = \frac{r(u\cot d - t)}{t - u\cot d}$ und $y = \frac{o}{t\sin d - u\cos d}$, wo es scheint, daß x und y bestimmte Werthe bekommen, so daß $x = -r$, und $y = o$ wäre. Allein x und y sind unbestimmt, also können diese Gleichungen nicht bestehen, wofern nicht der Zehler und Nenner beyder Brüche $= o$ ist. Also muß $t - u\cot d = o$, und $t\sin d - u\cos d = o$ seyn. Beyde Gleichungen sind einerley, und drücken schon die Natur der Projection aus, welches hier die grade Linie TK ist. Weil hier der sphärische Winkel LOC $= d$ ist, so giebt die Gleichung $\frac{u}{t} = \frac{\sin d}{\cos d} = \tang d = \frac{WK}{TW}$, also LOC = KTW, wie auch aus andern Gründen bekannt ist.

Für die orthographische Projection erhält man eben die Gleichung, wie aus dem vorigen §. folgt, wenn man in der dortigen Gleichung $t - c - u\cot d = o$ auch $c = o$ setzt: und es erhellet unmittelbar aus der Zeichnung, wenn OL mit OP parallel wird, daß nun das Bild x des Puncts L mit K und T in grader Linie liege. Demnach ist in diesem Fall einerley grade Linie sowohl die orthographische, als auch stereographische Projection des Meridians.

Wäre die Tafel irgend ein andrer größter Kreis der Erde, z. E. des Orts P wahrer astronomischer Horizont, und das Auge O im Nadir dieses Orts auf der Erde, um den Halbmesser der Erde von der Tafel entfernt, die Fundamentalebene aber der erste

Verticalkreis; so wäre OLP ein andrer Verticalkreis, der den ersten unter dem Winkel d schnitte. Die orthographische sowohl als stereographische Projection dieses Verticalkreises wird ebenfalls eine grade Linie seyn, welche die Fundamentallinie im Augenpunct unter eben dem Winkel t schneidet, unter welchem der Verticalkreis OLP gegen die Fundamentalebene geneigt ist.

15 §.

Bey eben der Lage des Auges gegen den Aequator als der Tafel, wie im vorigen §. sey XLY ein Parallelkreis mit dem Aequator, der vom Pol P um den Bogen $PL = \alpha$ absteht: man sucht seine Projection.

Aufl. Dieß ist der Fall des 11 §. wo $\eta = o$ ist, weil Fx mit TN parallel liegt. Nun fällt E in e mit F zusammen, und es ist T$e = c = r\cos\alpha$: überdem $a = o$, $\delta = r$, $d = 90°$. Man setze also in den Formuln des 11 §. $d = 90°$, $a = o$, $\delta = r$, $c = r\cos x$, so wird $x = (1 + \cos x)t$, und $y = (1 + \cos x)u$. Aber zwischen $x = ef$ und $y = f$L hat man die Gleichung $xx + yy = rr\sin\alpha^2$, und dieß giebt zwischen t und u folgende Gleichung $(1 + \cos x)^2\ (tt + nu) = rr\sin\alpha^2$, oder $tt + uu = \frac{rr\sin\alpha^2}{(1+\cos\alpha)^2}$. Demnach ist die Projection ein Kreis, dessen Halbmesser $= \frac{r\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = r\tang\frac{1}{2}\alpha$, wie auch sehr leicht aus blos geometrischen Gründen folgt.

Für die orthographische Projection wird $x = t$, und $y = u$, also $tt + uu = rr\sin\alpha^2$, und die Projection ist ein Kreis von eben dem Halbmesser, wie der Parallelkreis selbst, wie auch sonst bekannt ist. Die orthographische Projection k des Puncts L liegt, mit der stereographischen K eben dieses Puncts in einer graden Linie, die durch T gehet. (14 §.) Wenn demnach k des Puncts L

ortho=

orthographische Projection auf der Tafel gegeben ist, so darf man nur auf der graden Linie Tk das Stück $TK = \frac{\tang \frac{1}{2}\alpha}{\sin\alpha} TK$ nehmen, so ist K desselben Puncts L stereographische Projection.

Wenn ÆQ der Horizont des Orts P ist, und das Auge steht im Nadir desselben; so werden die Projectionen der Parallelkreise des Horizonts oder der Almucantharat eben so gefunden.

16 §.

Die Tafel sey der erste Meridian der Erdkugel, (6 Fig.) deren Halbmesser $= r$ ist, und die Fundamentalebene sey der Aequator: überdem sey der Abstand $GPL = \gamma$ eines Meridians AP vom ersten, oder seine geogrophische Länge gegeben: man soll seine Projection auf der Tafel suchen, wenn das Auge O im Pole des ersten Meridians stehet, welcher die Tafel abgiebt.

Aufl. Da hier die Puncte H und E in T zusammen fallen; so wird $b = c = o$. Ueberdem ist $a = o$, $\delta = r$, $\eta = \gamma$, und $d = 90°$, also erhält man $x = \frac{rt}{r\cos\gamma - t\sin\gamma}$, und $y = \frac{r\cos\gamma u}{r\cos\gamma - t\sin\gamma}$. Zwischen $TF = x$, und $FL = y$ hat man die Gleichung $xx + yy = rr$, also wird zwischen t und u folgende Gleichung gefunden $\frac{rrtt + rr\cos\gamma^2 uu}{(r\cos\gamma - t\sin\gamma)^2} = rr$, und daraus folgt $tt + \cos\gamma^2 uu = rr\cos\gamma^2 - rrt\sin\gamma\cos\gamma + tt\sin\gamma^2$, oder $tt + uu = rr - 2rt.\tang\gamma$. Die Projection ist also eine Linie der zweyten Ordnung, und weil beyde Factoren des höchsten Theils $tt + uu$ unmöglich sind, so gehört sie in die Classe der Ellipsen, dahin auch der Kreis zu rechnen ist. Diese Gleichung giebt $u = \pm\sqrt{(rr - 2rt.\tang\gamma - tt)}$, also $u = \pm r$,

wenn

wenn $t=o$ ist. Folglich gehet die Projectionen durch P und Q, so daß TP=TQ=r, wie auch aus der Zeichnung erhellet.

Es sey nun die Projection PDQ (8 Fig.) auf der Ebene der Tafel gezeichnet, so daß GH die Fundamentallinie, T der Augenpunct, und TP=TQ=r ist, so sind TD und Td die Werthe von t wenn $u=o$ ist. Aber diese Voraussetzung giebt $tt+2rt$. $\text{tang}\gamma=rr$, also $t=-r\text{tang}\gamma\pm r\surd(1+\text{tang}\gamma^2)$ oder $t=-r\text{tang}\gamma \mp r\text{sec}\gamma$. Man nehme also TC$=-r\text{tang}\gamma$, CD$=+r\text{sec}\gamma$, und C$d=-r\text{sec}\gamma$, so sind die Puncte D und d in der Projection, und es wird TD$=r(\text{sec}\gamma-\text{tang}\gamma)=r\text{tang}(45^\circ-\frac{1}{2}\gamma)=r\text{tang}\frac{90^\circ-\gamma}{2}$, T$d=-r(\text{sec}\gamma+\text{tang}\gamma=r\text{tang}(45^\circ+\frac{1}{2}\gamma)=r\text{tang}\frac{90^\circ+\gamma}{2}$.

Man rechne nun die Abscissen von dem Anfangspunct C; weil nämlich CT$=r\text{tang}\gamma$, so hat man $r\text{tang}\gamma+t=$Cw, und $t=$C$w-r\text{tang}\gamma$. Dieß in die gefundene Gleichung zwischen t und u gesetzt, giebt zwischen CW und u diese Gleichung C$w^2+uu=rr+rr\text{tang}\gamma^2$, oder C$w^2+uu=rr\text{sec}\gamma^2$. Also ist die Projection ein Kreis, dessen Halbmesser $=r\text{sec}\gamma$, und der Mittelpunct C liegt in der Fundamentallinie in der Entfernung TC$=-r\text{tang}\gamma$ vom Augenpunct. Also fällt C auf der andern Seite von T, wenn $\gamma>90^\circ$ ist. Für $\gamma=90^\circ$ wird die Projection die grade Linie PQ, weil der Halbmesser $r\text{sec}\gamma$ unendlich wird.

Wenn das Auge in der Axe der Tafel unendlich weit weg-ruckt, (6 Fig.) und also die Projection orthographisch wird; so fällt die Projection des Puncts L in K mit T und K in grader Linie. Ist nämlich LO mit OZ parallel, so bleibt doch LO in der Ebene eines Verticalkreises ZLO, der bey beyden Arten der Projection eine grade Linie wird, die durch T gehet. (14 §.) Der Winkel dieses Verticalkreises mit dem Meridian PZL, oder das Azi-

Azimuth des Puncts L, und sein Abstand von Scheitel ZL ist bestimmt, wenn man des Puncts L geographische Breite AL $= \psi$ weis, da LPZ der Stunden Winkel $= 90^\circ - \gamma$ ist. Man hat nämlich im sphärischen Dreyeck LPZ die Seite PL $= 90^\circ - \psi$, und die Ergänzung der Polhöhe ZP $= 90^\circ$. Also tang. PZL $= \frac{\sin PL \sin LPZ}{\cos PL} = \frac{\cos\psi \cos\gamma}{\sin\psi} =$ cotang. KTW, und cos P $=$ cos ESZ sin PL $= \sin\gamma \cos\psi$. Setzt man nun $x = TF = r\cos\psi$, $y = FL = r\sin\psi$, so erhält man $r\cos\psi = \frac{rt}{r\cos\gamma - t\sin\gamma}$, $r\sin\psi = \frac{r\cos\gamma u}{r\cos\gamma - t\sin\gamma}$. Hieraus folgt $t = \frac{r\cos\psi \cos\gamma}{1+\cos\psi \sin\gamma}$, $u = \frac{r\sin\psi}{1+\cos\psi\sin\gamma}$, also $\frac{u}{t} = \frac{WK}{TW} = \tan KTW = \frac{\sin\psi}{\cos\psi\cos\gamma}$, und cot. KTW $= \frac{\cos\psi\cos\gamma}{\sin\psi}$, wie vorhin, und $\sqrt{(tt+uu)} = TK = \frac{r\sqrt{(\sin\psi^2 + \cos\psi^2 \cos\gamma^2)}}{1+\cos\psi\sin\gamma} = \frac{r\sqrt{(1-\cos\psi^2 \sin\gamma^2)}}{1+\cos\psi\sin\gamma} = \frac{r\sin ZL}{1+\cos ZL} = r\tan\frac{1}{2}ZL$, wie nach dem 15 §. erfordert wird.

17 §.

Die Gleichung für die orthographische Projection ergiebt sich so. Man setze in den Formuln für die orthographische Projection des 10 §. hier $\delta = r, b = 0, \eta = \gamma, d = 90^\circ$, so wird $x = \frac{t}{\cos\gamma}$, und $y = u$. Dieß in $xx + yy = rr$ gesetzt giebt $\frac{tt}{\cos\gamma^2} + uu = rr$, oder $tt + uu\cos\gamma^2 = rr\cos\gamma^2$. Für $u = 0$, ist $t = \pm r\cos\gamma = TB$, und für $t = 0$, wird $u = \pm r = TP$. Man setze also $r\cos\gamma = TB$, so wird $\cos\gamma = \frac{TB}{r}$, und $tt + \frac{TB^2}{rr}uu = TB^2$, oder $tt = TB^2 - \frac{TB^2}{rr}uu$,

oder auch $uu = rr - \frac{rr}{TB^2}tt$. Demnach ist die Projection eine Ellipse, deren halbe Zwergaxe $= r =$ TP und halbe conjugirte Axe $=$ TB $= r\cos\gamma$. Die Abscissen t sind auf der conjugirten Axe vom Mittelpunct T gerechnet. Für diese orthographische Projection sey nun $Tw = t$, $wk = u$, und wie vorhin $x = TF = r\cos\psi$, $y = FL = r\sin\psi$, so wird $r\cos\psi = \frac{t}{\cos\gamma}$; also $t = r\cos\psi\cos\gamma$; und $r\sin\psi = u$, folglich $\frac{u}{t} = \frac{WK}{TW} = \frac{\sin\psi}{\cos\psi\cos\gamma}, = \frac{WK}{TW}$, wie erfordert wird, weil T, K und k in grader Linie liegen müssen. Ferner wird $Tk = r\surd(\sin\psi^2 + \cos\psi^2\cos\gamma^2) = r\surd(1 - \cos\psi^2\sin\gamma^2) = r\surd(1 - \cos ZL^2) = r\sin ZL$, wie dem 15 §. gemäß ist.

18 §.

Unter den Bedingungen des vorigen §. die Projectionen so vieler Meridiane als verlangt wird auf der Tafel durch Zeichnung zu finden.

Aufl. Der Kreis GPHQ (8 Fig.) stelle die Tafel vor, GH die Fundamentallinie, welche durch den Mittelpunct T der Tafel gehet, der zugleich der Augenpunct ist, und PQ sey auf der Fundamentallinie senkrecht, so ist PQ die Projection des Meridians von 90° Länge. Den Halbkreis PHQ theile man in gleiche Theile von 20 zu 20 oder von 10 zu 10 Graden, nachdem die Meridiane sich unter Winkel von 10° zu 10° oder von 5° zu 5° schneiden sollen. Durch alle Theilungspuncte, 20, 40, u. s. f. ziehe man grade Linien nach P, welche TH in C, D, E, F u. s. f. schneiden, so sind die Durchschnittspuncte nach der Ordnung die gesuchten Projectionen der Meridiane von 10°, 20°, 30°, 40° Länge u. s. f. und CP, DP, EP, FP, u. s. f. die zugehörigen Halbmesser. Beschreibt

man

man demnach aus C, D, E, F, u. s. f. mit den Halbmessern CP, DP, EP, FP, u. s. f. die Bogen PBQ, P20Q, P30Q, P40Q, u. s. f. so sind dieß die gesuchten Projectionen. Die Richtigkeit der Verzeichnung fällt leicht in die Augen. Es ist nämlich $TC = r\tan 10^\circ$, $CP = r\sec 10^\circ$, $TD = r\tan 20^\circ$, $DP = r\sec. 20^\circ$, u. s. f. wie nach dem §. erfordert wird. Diese Verzeichnung scheint mir leichter und in der Ausübung bequemer zu seyn als diejenige, welche sonst gewöhnlich vorgeschrieben wird, und auch von Herrn v. Wolf beybehalten ist, obgleich letztere ebenfalls aus den erwiesenen Formuln fließt. Es schneidet nämlich jede Projection PBQ die Fundamentallinie in der Entfernung TB vom Augenpunct, so daß $TB = r\tan \frac{90^\circ - \gamma}{2}$. Deswegen kann man auch den Quadranten GP von 10° zu 10° oder von 5° zu 5° eintheilen, und die graden Linien Q10, Q20, Q30, u. s. f. ziehen, welche GT in B, 20, 30, 40, u. s. f. schneiden. Durch diese Puncte gehen die Projectionen nach der Ordnung durch, und man muß zu den Kreisen PBQ, P20Q, u. s. f. die Mittelpuncte suchen. Es ist nämlich $TB = r\tan \frac{90^\circ - 10^\circ}{2}$, $T20 = r\tan \frac{90^\circ - 20^\circ}{2}$ u. s. f. Die Alten sind auf diese Verzeichnung durch den synthetischen Vortrag gekommen. Sie erwiesen, daß die Projection ein Kreis seyn müsse, und daß die drey Puncte P, B, Q; P, 20, Q, u. s. f. in diesen Kreisen liegen. Also durften sie nur zu diesen Kreisen durch die bekannte Verzeichnung die Halbmesser suchen. Aber die vorige Verzeichnung ist ohne Zweifel kürzer und bequemer, indem sich die Mittelpuncte auf einmal unmittelbar ergeben.

Für die Projectionen der Meridiane, deren Länge nicht viel von 90° unterschieden ist, fallen die Mittelpuncte sehr weit hinaus, und die Linien durch P schneiden TH unter sehr spitzigen Winkeln, daß also der eigentliche Durchschnittspunct etwas un-

bequem, und dabey zugleich etwas unsicher bestimmt wird, obgleich noch allemal sicherer, als bey der letztgedachten Verzeichnung. Will man diese Unbequemlichkeit ganz vermeiden, so darf man nur den Halbmesser $r\sec\gamma$ berechnen, welches durch Hülfe der Logarithmen sehr leicht ist. Auf solche Art bleibt keine andre Unbequemlichkeit übrig, als diejenige, welche in der Ausübung bey Verzeichnung sehr großer Kreise unvermeidlich ist, und welche die Theorie eigentlich nicht weiter heben kann, weil sie die Verzeichnung eines Kreises als eine Forderung annimmt, wenn der Mittelpunct und Halbmesser gegeben sind.

Man bedient sich bey den übrigen krummen Linien, zu deren Verzeichnung man keine so bequeme Instrumente hat, wie beym Kreise, dieses Vortheils. Man sucht für jede Abscisse die zugehörige Ordinate entweder durch Verzeichnung, oder durch Rechnung, und bestimmt auf solche Art mehrere Puncte, die in der krummen Linie einander so nahe liegen, daß man durch sie die krumme Linie aus freyer Hand ziehen kann. Eben dieses Hülfsmittels kann man sich hier bedienen, wenn die Halbmesser der Kreise so groß ausfallen, daß die Verzeichnung des Kreises deswegen beschwerlich wird. Bey einerley Mittagskreis ändert sich γ nicht, also ist es leicht $\tan PZL = \cot KTW = \frac{\cos\psi \cos\gamma}{\sin\gamma}$, oder $\tan KTW = \frac{\tan\psi}{\sin\psi}$ und $\cos ZL = \cos\psi \cdot \sin\gamma$ vermittelst der Logarithmen zu finden, indem man für ψ nach und nach 10°, 20°, oder auch 5°, 10°, u. s. f. nimmt, weil nun $WK = TW \tan KTW$, $= \frac{TW}{\tan PZL}$, so kann man leicht WK berechnen, wenn man TW so annimmt, wie es die jedesmalige Voraussetzung von $\psi = 10°$, $\psi = 20°$, u. s. f. erfordert. Es ist aber $TW = \frac{r\cos\psi \cos\gamma}{1 + \cos\psi \sin\gamma}$, und

WK

$WK = \frac{r \sin\psi}{1+\cos\psi \sin\gamma}$, und $\cos\psi \sin\gamma = \cos ZL$, $1+\cos\psi\sin\gamma = 1+\cos ZL = \frac{\sin ZL}{tang\,\frac{1}{2} ZL}$, also $TW = \frac{r\cos\psi\cos\gamma\, tang\,\frac{1}{2} ZL}{\sin ZL}$, und $WK = \frac{r\sin\psi\, tang\,\frac{1}{2} ZL}{\sin ZL}$. Durch Hülfe dieser beyden letzten Ausdrücke kann man für jede Voraussetzung von $\psi = 10°$, $\psi = 20°$, u. s. f. sowohl TW, als auch WK sehr leicht berechnen. Es sey z. E. $\gamma = 85°$, und $\psi = 54°$, $r = 10000$, so giebt die Rechnung

$l\cos\psi = 9,7692187$
$l\sin\gamma = 9,9983442$
$l\cos ZL = 19.7675629 - 10$
also $ZL = 54°9'$, $\frac{1}{2} ZL = 27°4\frac{1}{2}'$.
$lr = 4.0000000$
$l\cos\psi = 9.7692187$
$l\cos\gamma = 8.9402960$
22.7095147
$l\frac{\sin ZL}{tang\,\frac{1}{2} ZL} = 0.2002115$
$lt = 22.5093032 - 20$
also $TW = 323$.

$l\sin ZL = 9.9087814$
$l\,tang\,\frac{1}{2} ZL = 9.7085699$
$l\frac{\sin ZL}{tang\,\frac{1}{2} ZL} = 0,2002115$
$lr = 4.0000000$
$l\sin\psi = 9.9079576$
13.9079576
$l\frac{\sin ZL}{tang\,\frac{1}{2} ZL} = 0,2002115$
$lu = 13.7077461 - 10$
folglich $WK = 5102$.

Demnach nehme man TY = 5102 und YK = 323, so ist K in der Projection des Mittagskreises von 85° Länge, und K ist die Projection eines Puncts L von 54° Breite in diesem Mittagskreise.

Wenn L die Projection eines gegebenen Puncts in einem Meridian, z. E. von 40° Länge ist; so läßt sich die orthographische Projection eben dieses Puncts leicht auf folgende Art finden. Man ziehe TL, so ist $TL = r\,tang\,\frac{1}{2} ZL$, (15 §.) man nehme ferner

TM $= r\sin ZL$, so ist M die orthographische Projection eben des Punctes, wovon L die stereographische ist. Man darf demnach nur auf TH ein Stück TE $=$ TL nehmen, sodann PE ziehen, welche den Halbkreis PBQ in V schneidet, hierauf VX auf PQ senkrecht ziehen, und TM $=$ VX nehmen.

19 §.

Es bleibe alles wie im 16 §. (9 Fig.) in Ansehung der Lage der Tafel und des Auges: aber statt des Meridians sey ein Parallelkreis *DLd* des Aequators gegeben, dessen geographische Breite, oder Abstand vom Aequator $DG = \psi$ ist: man soll seine Projection auf der Tafel suchen.

Aufl. Es ist dieß der Fall des 12 §. da die Ebene von L*m* mit der Fundamentalebene parallel ist. Also hat man T*e* $= e$, und überdem $a = o$, $\delta = r$. Folglich wird $x = \frac{et}{u}$, und $z = \frac{r(e-u)}{u}$ $= \frac{re}{u} - r$. Da nun hier $ef = x$, $fL = z$, $eL = eD = ed = r\cos\psi$ ist, so hat man zwischen x und z die Gleichung $xx + zz = rr\cos\psi^2$. Ueberdem wird T*e* $= e = r\sin$, also $x = \frac{rt\sin\psi}{u}$, $z = \frac{rr\sin\psi}{u} - r$, und man erhält zwischen t und u die Gleichung $\frac{rr\,tt\sin\psi^2}{uu}$ $+ \frac{(rr\sin\psi}{u} - r)^2 = rr\cos\psi^2$, oder $\frac{tt\sin\psi^2}{uu} + \frac{r\sin\psi}{u} - 1)^2 = \cos\psi^2$, oder auch $tt\sin\psi^2 + (r\sin\psi - u)^2 = uu\cos\psi^2$. Dieß giebt $tt\sin\psi^2 + rr\sin\psi^2$ $- 2ru\sin\psi + uu\sin\psi^2 = o$, oder $tt + uu - \frac{2r}{\sin\psi}u + rr = o$. Als ist die Projection wiederum eine Linie der zweyten Ordnung, die in die Classe der Ellipsen gehört, dahin man auch den Kreis rechnen muß.

Man

Man kann die Gleichung auch so ausdrücken $tt + uu - 2r$ cosec$\psi\, u + rr = o$, und für $t = o$ wird $u = r$cosec$\psi \pm r\sqrt{(\text{cosec}\psi^2 - 1)}$, oder $u = r(\text{cosec}\psi \pm \cot\psi)$. Es sey demnach auf der Ebene der Tafel die Projection D K d (10 Fig.) gezeichnet, und TW $= t$, WK $= u$; man nehme TC $= r$cosecψ, C$a = - r\cot\psi$, C$b = + r\cot\psi$, so sind a und b in der Projection. Wenn man Kw mit Tw parallel ziehet, und in der gefundenen Gleichung TW = WK $= u$, wK = TW $= t$ setzet, so erhält man WK + TW² $- 2r$cosecψ TW $+ rr = o$. Da nun TC $= r$cosecψ, so erhält man TW + CW $= r$cosecψ, und TW $= r$cosecψ − CW. Dieß setze man statt TW in der letzten Gleichung, so erhält man zwischen CW und WK folgende Gleichung WK² + CW² $= rr\,(\text{cosec}\psi^2 - 1)$ oder WK² + CW² $= rr \cot\psi^2$, und diese ergiebt, daß die Projection ein Kreis sey, dessen Mittelpunct in C fällt, und dessen Halbmesser $= r\cot\psi$ ist. Der Mittelpunct C liegt in der graden Linie PQ, die durch den Augenpunct T auf der Fundamentallinie senkrecht steht; er ist vom Augenpunct um den Abstand TC $= r$cosecψ entfernt, und die Projection schneidet die Linie PQ in a so, daß Ta $= r(\text{cosec}\psi - \cot\psi) = r\tan\text{g}\tfrac{1}{2}\psi$. Wenn man mit dem Halbmesser TP $= r$ einen Kreis aus dem Mittelpunct T beschreibt, und auf demselben die Bogen PD = Pd $= 90° - \psi$ nimmt, so sind die Puncte D und d in der Projection. Dieß ergiebt die Zeichnung unmittelbar, weil die Puncte D und d der Parallelkreise mit ihren Projectionen zusammen fallen. Eben dieß ergiebt auch die Gleichung $tt + uu - 2ru\,\text{cosec}\psi + rr = o$. Man ziehe nämlich DE auf TW senkrecht, und setze t = TE $= r\cos\psi$, so wird $uu - 2ru\,\text{cosec}\psi = - rr - rr\cos\psi^2$, oder $uu - 2ru\,\text{cosec}\psi + rr\,\text{cosec}\psi^2 = rr\,(\text{cosec}\psi^2 - 1 - \cos\psi^2)$. Hieraus folgt $u = r\,\text{cosec}\psi \pm r\sqrt{(\cot\psi^2 - \cos\psi^2)}$, und es wird ED $= r\,\text{cosec}\psi - r\sqrt{(\cot\psi^2 - \cos\psi^2)}$. Es ist aber cosec$\psi$ $- \sqrt{(\cot\psi^2 - \cos\psi^2)} = \frac{1}{\sin\psi} - \cos\psi\sqrt{\frac{1}{\sin\psi^2} - 1)} = \frac{1}{\sin\psi} - \cos\psi\cot\psi$

=

$= \frac{1}{\sin\psi} - \frac{\cos\psi^2}{\sin\psi} = \frac{\sin\psi^2}{\sin\psi} = \sin\psi$; also $ED = r\sin\psi$. Demnach ist der Punct D des Kreises DPd zugleich in der Projection DKd.

Die Projection des Aequators wird eine grade Linie, die mit der Fundamentallinie einerley ist: denn das Auge steht in der Ebene des Aequators. Es wird auch $Ta = r\tang\frac{1}{2}\psi = o$, wenn $\psi = o$ ist, und der Halbmesser $r\cot\psi = \infty$.

Es entferne sich nun das Auge O in der Axe der Tafel unendlich von T, so wird die Projection orthographisch. Des Puncts L orthographische Projection K fällt mit eben dieses Puncts stereographischer Projection und dem Augenpunct T in grader Linie; wie dann auch leicht erhellet, daß die ganze orthographische Projection des Parallelkreises DLd eine grade Linie sey, die mit der Fundamentallinie in der Entfernung $Te = r\sin\psi$ parallel ist. So hat man auch nach dem 12 §. $e - u = o$, oder $u = e$ für die Gleichung der Projection.

Die Lage des Puncts L hängt von seiner geographischen Länge mit ab. Es sey PLA ein Mittagskreis durch L, und GPA $= \gamma$, so ist $ef = x = r\cos\psi\cos\gamma$, und $z = fL = r\cos\psi\sin\gamma$. In dieser Voraussetzung wird $r\cos\psi\cos\gamma = \frac{rt\sin\psi}{u}$ und $r\cos\psi\sin\gamma$ $= \frac{rr\sin\psi}{u} - r$, also $u = \frac{r\sin\psi}{1 + \cos\psi\sin\gamma}$ und $t = \frac{r\cos\psi\cos\gamma}{1 + \cos\psi\sin\gamma}$. Dieß sind eben die Ausdrücke, welche im 16 §. gefunden worden, wie es denn auch eben dieselben Data sind. Es liegt nämlich L zugleich in einem Meridian, dessen Länge $= \gamma$, und in einem Parallelkreis, dessen Breite $= \psi$ ist, eben so, wie im 16 §. vorausgesetzt worden. Es bleibt auch ZL der Abstand vom Zenith, und

PZL

PZL das Azimuth, also ist $\cos ZL = \sin\gamma \cos\psi$, $u = \frac{r \sin\psi \tang \frac{1}{2} ZL}{\sin ZL}$, und $t = \frac{r \cos\psi \cos\gamma \tang \frac{1}{2} ZL}{\sin ZL}$.

20 §.

Unter den Bedingungen des vorigen §. die Projectionen so vieler Parallelkreise, als verlangt wird, die um gleiche Bogen, z. Ex. von 10 zu 10, oder 5 zu 5 Graden, von einander abstehen, auf der Tafel durch Zeichnung zu finden.

Aufl. Es sey (7 Fig.) GH die Fundamentallinie, T der Augenpunct, so ist GH zugleich die Projection des Aequators. Man theile den Quadranten HP von 10 zu 10 oder 5 zu 5 Graden ein, und ziehe die graden Linien G80, G70, G60, u. s. f. welche PT in a, b, u. s. f. schneiden. Durch diese Puncte nach der Ordnung gehen die Projectionen der Parallelkreise von 80°, 70°, 60° Breite, u. s. f. denn es ist $Ta = r\tang \frac{1}{2} 80°$, $Tb = r\tang \frac{1}{2} 70°$, u. s. f. Weil nun die Bogen P80, P70, u. s. f. auf beyden Seiten von P gleich groß genommen werden; so hat man für die Parallelkreise von 80°, von 70°, und eben so für alle folgende drey Puncte, durch welche ihre Projectionen durchgehen, daß man also die zugehörigen Mittelpuncte durch Zeichnung suchen kann. Allein man kann auch dieser Mühe überhoben seyn, wenn man, wie im 18 §. den Halbkreis PHQ gehörig eingetheilt, und die Linien P20, P40, u. s. f. gezogen hat. Denn es ist $TC = r\cot 80°$, $TD = r\cot 70°$, u. s. f. Also sind TC, TD, u. s. f. nach der Ordnung die Halbmesser der Projectionen der Parallelkreise von 80°, 70°, 60° Breite u. s. f. Deswegen nehme man nach der Ordnung $ac = TC$, $bd = TD$ u. s. f. so sind c, d, u. s. f. die Mittelpuncte der Kreise, welche die Projectionen der Parallelkreise von 80°, 70° Breite, u. s. f. abgeben.

Die Halbmesser fallen desto größer aus, je kleiner die Breite des Parallelkreises ist, und man kann die Unbequemlichkeit, worinn man hiedurch bey der Verzeichnung geräth, leicht vermeiden, wenn man diese Halbmesser durch Hülfe des Ausdrucks $r\cot\psi$ vermittelst der Logarithmen berechnet: da dann wiederum die Schwierigkeit nur bleibt, so große Kreise zu zeichnen. Allein auch diese läßt sich ziemlich heben, wenn man, wie im 18 §. t und u aus γ und ψ berechnet, und auf solche Art mehrere Puncte nach einander sucht, durch welche der gesuchte Kreisbogen durchgehen muß, da sich hier für einerley Parallelkreis nur γ ändert. Man hat auch hier $\cos ZL = \sin\gamma \cos\psi$, $u = \frac{r\sin\psi \tan\frac{1}{2} ZL}{\sin ZL}$, $t = \frac{r\cos\psi \cos\gamma \tan\frac{1}{2} ZL}{\sin ZL}$. Es sey z. Ex. $r = 10000$, $\psi = 5°$ und $\gamma = 54°$, so giebt die Rechnung

$l\sin\gamma = 9,9079576$
$l\cos\psi = 9.9983442$

$l\cos ZL = 19.9063018 - 10$

$ZL = 36°\ 18'$
$\frac{1}{2} ZL = 18°\ 9'$

$l\sin ZL = 9.7723314$
$l\tan\frac{1}{2} ZL = 9.5156309$

$l\frac{\sin ZL}{\tan\frac{1}{2} ZL} = 0,2567005$

$lr = 4.0000000$
$l\sin\psi = 8.9402960$

$lr\sin\psi = 12.9402960$
$l\frac{\sin ZL}{\tan\frac{1}{2} ZL} = 0.2567005$

$lu = 12.6835955 - 10$
$u = 482,6.$

$lr = 4,0000000$
$l\cos\psi = 9.9983442$
$l\cos\gamma = 9.7692187$

23.7675629
$l\frac{\sin ZL}{\tan\frac{1}{2} ZL} = 0,2567005$

$lt = 23.5108624 - 20$
$t = 3242,4$

Man

Man nehme also TW = 3242, 4, und WK = 482, 6, so ist K in der Projection des Parallelkreises von 5° Breite und zugleich in der Projection eines Meridians von 54° Länge.

21 §.

Es sey GBHb (11 Fig.) ein größter Kreis der Erdkugel, dessen Pole Z und O sind, so wird er der wahre Horizont des Orts Z seyn, dessen Scheitellinie OZ ist. Es sey ferner pq die Axe des Aequators, so wird der größte Kreis ZpOQ der Meridian des Orts Z, und Bb die Mittagslinie seyn. Wenn nun der Aequator EGQH den Horizont in GH schneidet, so ist GH auf der Ebene des Meridians senkrecht, und GZHO der erste Verticalkreis. *Nun sey GBHb die Tafel, das Auge stehe in O im Nadir des Orts Z, und durch die Axe pq des Aequators sey ein Stundenkreis pLA gelegt, der mit dem Meridian einen gegebenen Winkel* $ZpV = \phi$ *einschließt: man soll seine Projection auf der Tafel suchen, wenn auch des Orts Z geographische Breite* $QZ = \lambda$ *gegeben ist.*

Aufl. Der Stundenkreis pLV schneide die Fundamentalebene in TV, so ist GTV $= \eta$, und der sphärische Winkel pVG $= d$. Ueberdem ist $a = 0$, $b = c = 0$, und $\delta = r$. Also geben die Formuln des 9 §. folgende Ausdrücke

$$x = \frac{ru\sin\eta\cot d - rt}{t\sin\eta - u\cot d - r\cos\eta}, \text{ oder auch}$$

$$x = \frac{ru\sin\eta\cos d - rt\sin d}{t\sin\eta\sin d - u\cos d - r\cos\eta\sin d}, \text{ und}$$

$$y = \frac{ru\cos\eta}{u\cos d - t\sin\eta\sin d + r\cos\eta\sin d}.$$

Im sphärischen Dreyeck VpZ sey der Winkel pVZ $= \xi$, die Seite VZ $= \varepsilon$, so ist $\eta + \varepsilon = 90°$, $d + \xi = 180°$, also $\sin\eta = \cos\varepsilon$, $\cos\eta = \sin\varepsilon$, $\sin d = \sin\xi$, $\cos d = -\cos\xi$, und es wird

$$x = \frac{rt\sin\xi + ru\cos\varepsilon\cos\xi}{r\sin\varepsilon\sin\xi - t\cos\varepsilon\sin\xi - u\cos\xi} = \frac{rt + ru\cos\varepsilon\cot\xi}{r\sin\varepsilon - t\cos\varepsilon - u\cot\xi},$$

$$y = \frac{ru\sin\varepsilon}{r\sin\varepsilon\sin\xi - t\cos\varepsilon\sin\xi - u\cos\xi} = \frac{ru\frac{\sin\varepsilon}{\sin\xi}}{r\sin\varepsilon - t\cos\varepsilon - u\cot\xi}.$$

Wenn nun LF auf TV senkrecht ist, so hat man $TF = x$, $FL = y$, und $xx + yy = rr$, da dann die gefundenen Werthe statt x und y gesetzt folgende Gleichung zwischen t und u geben.

$$\frac{(rt + ru\cos\varepsilon\cot\xi)^2 + rruu\frac{\sin\varepsilon^2}{\sin\xi^2}}{(r\sin\varepsilon - t\cos\varepsilon - u\cot\xi)^2} = rr$$

Hieraus folgt

$$tt + 2tu\cos\varepsilon\cot\xi + uu\cos\varepsilon^2\cot\xi^2 + uu\frac{\sin\varepsilon^2}{\sin\xi^2} = rr\sin\varepsilon^2 - 2tr\sin\varepsilon\cos\varepsilon$$
$$- 2ru\sin\varepsilon\cot\xi - tt\cos\varepsilon^2 - 2tu\cos\varepsilon\cot\xi - uu\cot\xi^2$$

oder auch

$$tt\sin\varepsilon^2 - uu\sin\varepsilon^2\cot\xi^2 + uu\frac{\sin\varepsilon^2}{\sin\xi^2} = rr\sin\varepsilon^2 - 2tr\sin\varepsilon\cos\varepsilon - 2ru\sin\varepsilon\cot\xi$$

Man multiplicire alles mit $\sin\xi^2$ und setze $\cot\xi\sin\xi = \cos\xi$, so wird

$$tt\sin\varepsilon^2\sin\xi^2 + uu\sin\varepsilon^2\sin\xi^2 = rr\sin\varepsilon^2\sin\xi^2 - 2tr\sin\varepsilon\cos\varepsilon\sin\xi^2 - 2ru\sin\varepsilon\cos\xi\sin\xi.$$

Nun kann man alles mit $\sin\varepsilon\sin\xi$ dividiren, und es wird

$$tt\sin\varepsilon\sin\xi + uu\sin\varepsilon\sin\xi = rr\sin\varepsilon\sin\xi - 2tr\cos\varepsilon\sin\xi - 2ru\cos\xi.$$

Aber im sphärischen Dreyeck ZpV, das bey Z rechtwinklicht ist, hat man $\frac{\sin VZ}{\sin VpZ} = \frac{\sin pZ}{\sin pVZ}$, $\sin VpZ = \frac{\cos pVZ}{\cos pZ}$, $\cos VpZ = \cos VZ \sin pVZ$. Weil nun $VZ = \varepsilon$, $pZ = 90° - \lambda$, $VpZ = \phi$, $pVZ = \xi$, so wird $\frac{\sin\varepsilon}{\sin\phi} = \frac{\cos\lambda}{\sin\xi}$, $\sin\phi = \frac{\cos\xi}{\sin\lambda}$, $\cos\phi = \cos\varepsilon\sin\xi$. Folglich auch $\sin\varepsilon\sin\xi = \sin\phi\cos\lambda$ und $\cos\xi = \sin\phi\sin\lambda$. Man substituire die drey letzten Werthe in der gefundenen Gleichung, so erhält man

$(tt+uu)$

$(tt+uu)\sin\phi\cos\lambda = rr\sin\phi\cos\lambda - 2tr\cos\phi - 2ru\sin\phi\sin\lambda$,

oder $tt+uu = rr - 2tr\frac{\cot\phi}{\cos\lambda} - 2ru\tan\lambda$

oder auch $tt+uu = rr - 2tr\frac{\sec\lambda}{\tan\phi} - 2ru\tan\lambda$,

und diese Gleichung ergiebt, daß die Projection wiederum in die Classe der Ellipsen gehöre, die auch hier ein Kreis wird.

Man ordne nämlich die Gleichung nach den Potenzen von u, so hat man $uu + 2ru\tan\lambda + tt + \frac{2r\sec\lambda}{\tan\phi}t - rr = 0$.

Auf der Ebene der Tafel sey die Projection PK (13 Fig.) gezeichnet, und GH die Fundamentallinie, T der Augenpunct, $TW = t$, $WK = u$. Man setze $t = 0$, so wird $uu + 2ru\tan\lambda - rr = 0$, also $u = -r\tan\lambda \pm r\sec\lambda$. Man nehme demnach TD $= -r\tan\lambda$, DP $= +r\sec\lambda$, DQ $= -r\sec\lambda$, so liegen die Puncte P und Q in der Projection. Man ziehe EF mit GH parallel, und nachdem WK bis W verlängert worden, sey WK $= x$, so wird $x = r\tan\lambda + u$, also $u = x - r\tan\lambda$. Dieß in die vorige Gleichung zwischen t und u gesetzt, giebt zwischen D$w = t$, und wK $= x$ diese Gleichung

$$xx - 2rx\tan\lambda + rr\tan\lambda^2 + tt + \frac{2r\sec\lambda}{\tan\phi}t - rr = 0, + 2rx\tan\lambda - 2rr\tan\lambda^2$$

oder $xx - rr(\tan\lambda^2 + 1) + tt + \frac{2r\sec\lambda}{\tan\phi}t = 0$.

Man setze $x = 0$, so hat man $tt + \frac{2r\sec\lambda}{\tan\phi}t = rr\sec\lambda^2$, und dieß giebt $t = -\frac{r\sec\lambda}{\tan\phi} + r\sec\lambda\,\mathrm{cosec}\phi$. Nimmt man demnach DC $= -\frac{r\sec\lambda}{\tan\phi}$, CE $= +r\sec\lambda\,\mathrm{cosec}\phi$, CF $= -r\sec\lambda\,\mathrm{cosec}\phi$, so sind

die Puncte E und F in der Projection. Es sey nun $Cw = s$, so ist $t + \frac{r\sec\lambda}{\tan g\phi} = s$, und $t = s - \frac{r\sec\lambda}{\tan g\phi}$. Setzt man dieß in der letzten Gleichung statt t, so wird $zz + ss - \frac{rr\sec\lambda^2}{\tan g\phi^2} - rr\sec\lambda^2 = o$, oder $zz + ss = rr\sec\lambda^2 \operatorname{cosec}\phi^2$. Demnach ist die Projection ein Kreis, dessen Halbmesser $= r\sec\lambda \operatorname{cosec}\phi$. Der Mittelpunct dieses Kreises liegt in der Tafel unter der Fundamentallinie, und wird so gefunden. Durch den Augenpunct setze man TD auf der Fundamentallinie senkrecht, und nehme $TD = r\tan g\lambda$. Durch D ziehe man mit der Fundamentallinie eine Parallele, und nehme $DC = \frac{r\sec\lambda}{\tan g\phi}$ auf der Seite die TW entgegen gesetzt ist, so ist C der Mittelpunct. Wäre ϕ negativ, oder fiele pV auf der andern Seite des Meridians pZ, so müßte DC auf der entgegengesetzten Seite von D genommen werden, weil nun $\tan g\gamma$ negativ ist. Für $\phi = 90°$ fällt C in D, weil $\tan g\phi = \infty$, und also $DC = \frac{r\sec\lambda}{\tan g\phi} = o$ wird. Der Halbmesser ist nun $= r\sec\lambda = DP$.

22 §.

Bey dieser Auflösung sind folgende Umstände merkwürdig. Die Linie TD wird allein durch den Winkel λ und nicht durch ϕ bestimmt. Demnach werden die Mittelpunete der Projectionen aller Stundenkreise in der Linie EF liegen, wenn λ einerley bleibt. Ziehet man in der 11 Fig. die grade Linie Op, welche die Tafel in P durchbohret, so ist P die Projection des Pols p und dieser liegt in Bb, dem Durchschnitt des Meridians und der Tafel, oder der Mittagslinie, worinn sich der Meridian des Orts Z projicirt, wie auch die Gleichung ergiebt, weil für $\phi = o$, $\operatorname{cosec}\phi = \infty$ also der Kreis eine grade Linie wird. Man hat also TP, wenn man in

der Gleichung zwischen t und u die Abscisse $t=o$ setzt. Dieß gab $u=-r\text{tang}\lambda \pm r\sec\lambda$, also ist $TP=r(\sec\lambda - \text{tang}\lambda) = r\text{tang}\frac{90°-\lambda}{2} = r\text{tang}\frac{1}{2}pZ$, wie auch unmittelbar aus der Zeichnung erhellet. Wenn man die Linie Oq zöge, und bis sie mit der Tafel zusammen stieße verlängerte, so würde der Durchschnittspunct π unterwärts in der verlängerten TD fallen, und dieser wäre dann die Projection des entgegengesetzten Pols q. Diesen giebt die andre Applicate für $u=o$. Es wird nämlich $T\pi = -r(\sec\lambda + \text{tang}\lambda) = -r\text{tang}\frac{90°+\lambda}{2} = r\text{tang}\frac{qZ}{2}$, wie ebenfalls auch aus der Zeichnung erhellet. Da nun diese beyden Ordinaten ebenfalls nicht von ϕ abhängen, so sind die Puncte P und Q für alle Stundenkreise einerley, und die Projectionen aller Stundenkreise schneiden einander in diesen Puncten. Wenn nun in der Tafel die Linie PC gezogen ist, so wird $PD:DC = 1:\text{tang}\,CPD = r\sec\lambda : \frac{r\sec\lambda}{\text{tang}\phi} = 1:\cot\phi$. Also ist $\text{tang}\,CPD = \cot\phi$, folglich $CPD = 90° - \phi$. Hat man demnach $TD = r\text{tang}\lambda$ genommen, und durch D eine Parallele EF mit der Fundamentallinie gezogen, so setze man an P den Winkel $DPC = 90° - \phi$, und es wird PC die Linie EF im Mittelpunct des Kreises schneiden, der der Projection des Stundenkreises zugehört, welcher mit dem Mittagskreise einen Winkel $=\phi$ einschließt.

23 §.

Es rücke nun das Auge in der Axe der Tafel (11 Fig.) von der Tafel weg, bis LO mit OZ parallel und die Projection orthographisch wird; so fällt die orthographische Projection K des Puncts L mit T und K in grader Linie. Es ist nämlich TK die Projection des Verticalkreises ZL, und es wird pZL das Azimuth

des

des Puncts L, so wie ZL sein Abstand vom Zenith ist. Dafern nun noch $AL = \psi$ des Puncts L geographische Breite gegeben ist, so hat man die Lage des Puncts L völlig bestimmt. Im sphärischen Dreyeck pZL ist nun $LpZ = \phi$, $pZ = 90° - \lambda$, $pL = 90° - \psi$, und $\cos ZL = \cos pL \cos pZ + \cos ZpL \sin pL \sin pZ$, $\tang pZL =$ $\frac{\sin pL \sin ZpL}{\cos pL \sin pZ - \cos ZpL \cos pZ \sin pL}$, also wird $\cos ZL = \sin\psi \sin\lambda$ $+ \cos\phi \cos\psi \cos\lambda$, und $\tang pZL = \frac{\cos\psi \sin\phi}{\sin\psi \cos\lambda - \cos\phi \sin\lambda \cos\psi}$.

Ferner hat man im sphärischen Dreyeck VLZ auch $\cos ZL$ $= \cos VZ \cos VL + \cos ZVL \sin VZ \sin VL$ und

$\tang VZL = \frac{\sin VL \sin ZVL}{\cos VL \sin VZ - \cos ZVL \cos VZ \sin VL}$. Es war aber

$x = \frac{rt \sin\xi + ru \cos\varepsilon \cos\xi}{r \sin\varepsilon \sin\xi - t \cos\varepsilon \sin\xi - u \cos\xi}$, $y = \frac{ru \sin\varepsilon}{r \sin\varepsilon \sin\xi - t \cos\varepsilon \sin\xi - u \cos\xi}$,

und $\varepsilon = VZ$, $\xi = LVZ$. Ferner ist $x = r \cos VL$

$= \frac{rt \sin\xi + ru \cos VZ \cos\xi}{r \sin VZ \sin\xi - t \cos VZ \sin\xi - u \cos\xi}$, und $y = r \sin VL$

$= \frac{ru \sin VZ}{r \sin VZ \sin\xi - t \cos VZ \sin\xi - u \cos\xi}$. Aus den beyden letzten Gleichungen folgt diese $\frac{\cos VL}{t \sin\xi + u \cos VZ \cos\xi} = \frac{\sin VL}{u \sin VZ}$, oder $u \sin VZ$ $\cos VL - t \sin\xi \sin VL - u \cos\xi \cos VZ \sin VL = 0$. Wenn man ferner die erste mit $\cos VL$, die letzte mit $\sin VL$ multiplicirt, und beyde addirt, so wird $u \sin VZ \sin VL + t \sin\xi \cos VL + u \cos VZ \cos\xi$ $\cos VL = r \sin VZ \sin\xi - t \cos VZ \sin\xi - u \cos\xi$. Man multiplicire diese wiederum mit $\sin VL$ und die nächst vorhergehende mit $\cos VL$, addire sodann beyde zusammen, so erhält man

$u \sin VZ = r \sin\xi \sin VZ \sin VL - t \sin\xi \cos VZ \sin VL - u \cos\xi \sin VL$ oder $u(\sin VZ + \cos\xi \sin VL) = t \sin\xi \sin VZ \sin VL - t \sin\xi \cos VZ \sin VL$

und

und $u = \frac{r\sin\xi \sin VZ \sin VL - t\sin\xi \cos VZ \sin VL}{\sin VZ + \cos\xi \sin VL}$.

Aber aus der Gleichung $u\sin VZ \cos VL - t\sin\xi \sin VL - u\cos\xi \cos VZ \sin VL = 0$ folgt $u = \frac{t\sin\xi \sin VL}{\sin VZ \cos VL - \cos\xi \cos VZ \sin VL}$. Beyde Werthe gleich gesetzt geben

$$\frac{t}{\sin VZ \cos VL - \cos\xi \cos VZ \sin VL} = \frac{r\sin VZ - t\cos VZ}{\sin VZ + \cos\xi \sin VL},$$

und daraus folgt

$(\sin VZ + \cos\xi \sin VL + \sin VZ \cos VZ \cos VL - \cos\xi \sin VL \cos VZ^2)t =$
$= r(\sin VZ^2 \cos VL - \cos\xi \sin VZ \cos VZ \sin VL)$. Setzt man nun $1 - \cos VZ^2 = \sin VZ^2$, so kann man alles mit $\sin VZ$ dividiren, und es wird $t = \frac{r(\sin VZ \cos VL - \cos\xi \cos VZ \sin VL)}{1 + \cos VZ \cos VL + \cos\xi \sin VZ \sin VL}$.

Dieß in den letzten Ausdruck für u statt t gesetzt giebt

$$u = \frac{r\sin\xi \sin VL}{1 + \cos VZ \cos VL + \cos\xi \sin VZ \sin VL}.$$

Nun war $\sin VZ \cos VL - \cos\xi \cos VZ \sin VL = \frac{\sin VL \sin\xi}{\tang VZL}$ und $\cos VZ \cos VL + \cos\xi \sin VZ \sin VL = \cos ZL$, also wird

$t = \frac{r\sin VL \sin\xi}{\tang VZL (1 + \cos ZL)}$, $u = \frac{r\sin VL \sin\xi}{1 + \cos ZL}$. Weil nun überdem $\frac{\sin VL}{\sin VZL} = \frac{\sin ZL}{\sin\xi}$, also $\sin VL \sin\xi = \sin ZL \sin VZL$, so erhält man

$t = \frac{r\sin ZL \sin VZL}{\tang VZL (1 + \cos ZL)}$, $u = \frac{r\sin ZL \sin VZL}{1 + \cos ZL}$: oder $t = r\tang \frac{1}{2} ZL \cos VZL$, $u = r\tang \frac{1}{2} ZL \sin VZL$. Aber im sphärischen Dreyeck pZL hat man $pZL = 90° - VZL$, und $\frac{\sin ZL}{\sin\phi} = \frac{\sin pL}{\sin pZL} = \frac{\cos\psi}{\cos VZL}$, also $\cos VZL = \frac{\cos\psi \sin\phi}{\sin ZL}$. Dieß giebt $t = \frac{r\cos\psi \sin\phi \tang \frac{1}{2} ZL}{\sin ZL}$.

Endlich hat man im sphärischen Dreyeck pZL auch $\cos pZL$ $= \frac{\cos pL - \cos ZL \cos pZ}{\sin ZL \sin pZ} = \sin VZL$, also $\sin VZL = \frac{\sin\psi - \cos ZL \sin\lambda}{\sin ZL \cos\lambda}$,

und $u = \frac{r \tang \frac{1}{2} ZL (\sin\psi - \cos ZL \sin\lambda)}{\sin ZL \cos\lambda}$.

24 §.

Wenn man die Formuln des 21 §. und die daraus im vorigen 23 §. hergeleiteten mit dem 16 §. vergleicht, so findet man allenthalben eine völlige Uebereinstimmung, und es hätte die Auflösung des 16 §. aus dieser hergeleitet werden können, weil jene von dieser nur ein besondrer Fall ist. Im 16 §. ward angenommen, daß Z im Aequator selbst stehe. Wenn man demnach $\lambda = ZF = o$ setzt, so müssen die jetzigen Formuln insgesammt mit denjenigen übereinkommen, die im 16 §. erwiesen sind. Es war hier der Halbmesser der Projection $= r \sin\lambda \operatorname{cosec}\phi$, und dieser wird $= r \operatorname{cosec}\phi$ wenn $\lambda = o$ ist. Es fällt nun F in Z und p in B, und ϕ wird das Complement des Winkels, den der Meridian pL mit der Tafel macht. Dieser war im 16 §. $= \gamma$, also ist $\operatorname{cosec}\phi = \sec\gamma$, und der Halbmesser der Projection wird $= r\sec\gamma$, wie im 16 §. Ferner wird $TD = r \tang\lambda = o$, und $DC = -\frac{r\sec\lambda}{\tang\phi}$ $= -\frac{r}{\cot\gamma} = -r\tang\gamma = TC$ im 16 §. Aus $t = \frac{r\cos\psi \sin\phi \tang\frac{1}{2}ZL}{\sin ZL}$,

und $u = \frac{r\tang\frac{1}{2}ZL (\sin\psi - \cos ZL \sin\lambda)}{\sin ZL \cos\lambda}$ wird $t = \frac{r\cos\psi \cos\gamma \tang\frac{1}{2}ZL}{\sin ZL}$

und $u = \frac{r\sin\psi \tang\frac{1}{2}ZL}{\sin ZL}$, wenn $\lambda = o$ und $\phi = 90° - \gamma$ gesetzt wird, so wie man auch $\cos ZL = \cos\phi \cos\psi = \sin\gamma \cos\psi$ erhält, wie dem 16 §. gemäß ist.

25 §.

Bey eben der Lage des Meridians oder Stundenkreises pLA gegen die Tafel, wie im 21 §. die orthographische Projection desselben zu finden.

Aufl. Wenn man in den Formuln des 10 §. für die orthographische Projection, wo $a=0$ ist, auch $b=c=0$, setzt, wie es den Voraussetzungen des 20 §. gemäß ist, so wird $x = t\sec\eta - u\tang\eta\cot d$, und $y = \frac{u}{\sin d}$. Man setze wie im 20 §. $\eta = 90° - \varepsilon$ und $d = 180° - \xi$ so erhält man $x = t\operatorname{cosec}\varepsilon + u\cot\varepsilon\cot\xi$ und $y = \frac{u}{\sin\xi}$. Dieß in die Gleichung $xx + yy = rr$ gesetzt giebt für die orthographische Projection $\left(\frac{t}{\sin\varepsilon} + \frac{u\cos\varepsilon\cos\xi}{\sin\varepsilon\sin\xi}\right)^2 + \frac{uu}{\sin\xi^2} = rr$, oder $(t\sin\xi + u\cos\varepsilon\cos\xi)^2 + uu\sin\varepsilon^2 = rr\sin\varepsilon^2\sin\xi^2$.
Hieraus folgt
$uu\cos\varepsilon^2\cos\xi^2 + 2tu\sin\xi\cos\xi\cos\varepsilon + tt\sin\xi^2 = rr\sin\varepsilon\sin\xi^2 + uu\sin\varepsilon^2$
oder auch $uu(1 - \cos\varepsilon^2\sin\xi^2) + 2tu\sin\xi\cos\xi\cos\varepsilon + tt\sin\xi^2 = rr\sin\varepsilon\sin\xi^2$.

Man substituire aus dem 20 §. die Werthe $\cos\varepsilon\sin\xi = \cos\phi$, $\sin\varepsilon\sin\xi = \sin\phi\cos\lambda$, $\cos\xi = \sin\phi\sin\lambda$, so wird
$uu(\sin\phi^2 + 2tu\sin\phi\cos\phi\sin\lambda + tt(1 - \sin\phi^2\sin\lambda^2) = rr\sin\phi^2\cos\lambda^2$
oder $uu + 2tu\cot\phi\sin\lambda + (\operatorname{cosec}\phi^2 - \sin\lambda^2)\,tt = rr\cos\lambda^2$.
Die Gleichung drückt eine Ellipse aus, dafern $\cot\phi^2\sin\lambda^2 < \operatorname{cosec}\phi^2 - \sin\lambda^2$. Es ist aber diese Voraussetzung wirklich richtig, denn es ist allemal $\operatorname{cosec}\phi^2\sin\lambda^2 < \operatorname{cosec}\phi^2$, also $\cot\phi^2\sin\lambda^2 + \sin\lambda^2 < \operatorname{cosec}\phi^2$, und $\cot\phi^2\sin\lambda^2 < \operatorname{cosec}\phi^2 - \sin\lambda^2$.

Die Ebene des Meridians pLA (11 Fig.) schneide die Tafel in der graden Linie TN, so hat man im sphärischen Dreyeck

BpN tang $BN = \sin Bp$ tang $BpN = \sin\lambda \tan\phi$, also $\sin BN = \frac{\sin\lambda \sin\phi}{\surd(1 - \cos\lambda^2 \sin\phi^2)}$, $\cos BN = \frac{\cos\phi}{\surd(1 - \cos\lambda^2 \sin\phi^2)}$. Es sey die Projection auf der Ebene der Tafel gezeichnet, GH sey die Fundamentallinie, T der Augenpunct, PQ die Projection des Meridians $TW = t$, $WK = u$. Wenn $u = o$, so wird $t = \pm \frac{r\sin\phi \cos\lambda}{\surd(1 - \sin\phi^2 \sin\lambda^2)}$, und wenn $t = o$, so ist $u = \pm r\cos\lambda$. Also schneidet die Projection die Fundamentallinie in E und F, (15 Fig.) so daß $TE = TF = \frac{r\cos\phi \cos\lambda}{\surd(1 - \sin\phi^2 \sin\lambda^2)}$, die Projection des Meridians aber in Π und π, so daß $T\Pi = T\pi = r\cos\lambda$. Demnach ist T der Ellipse Mittelpunct, und EF, $\Pi\pi$ sind ein paar Durchmesser, aber keine zusammen gehörige. Man ziehe nun TN unter dem Winkel PTN, so daß $\sin PTN = \frac{\sin\lambda \sin\phi}{\surd(1 - \cos\lambda^2 \sin\phi^2)}$ und $\cos PTN = \frac{\cos\phi}{\surd(1 - \cos\lambda^2 \sin\phi^2)}$. Auf TN sey TR senkrecht, und KR mit TN parallel. Setzt man nun $TR = s$, und $RK = Z$, so ergiebt sich auf folgende Art eine Gleichung zwischen s und Z. Aus Vergleichung der ähnlichen Dreyecke TWV, TRS, SKW, VKR findet man $t = s\cos PTN - z\sin PTN$ $u = z\cos PTN + s\sin PTN$, also wird $t = \frac{s\cos\phi - z\sin\lambda \sin\phi}{\surd(1 - \cos\lambda^2 \sin\phi^2)}$; $u = \frac{z\cos\phi + s\sin\lambda \sin\phi}{\surd(1 - \cos\lambda^2 \sin\phi^2)}$. Die gefundene Gleichung für die Projection läßt sich so ausdrücken $uu\sin\phi^2 + 2tu\sin\phi \cos\phi \sin\lambda + tt(\cos\lambda^2 + \cos\phi^2 \sin\lambda^2) = rr\sin\phi^2 \cos\lambda^2$ oder $(u\sin\phi = t\cos\phi \sin\lambda)^2 + tt\cos\lambda^2 = rr\sin\phi^2 \cos\lambda^2$; und man findet, wenn man der Kürze wegen $\surd(1 - \cos\lambda^2 \sin\phi)^2 = R$ setzet.

$$u\sin\phi = (z\sin\phi \cos\phi + s\sin\lambda \sin\phi^2) : R$$

$$+ t\cos\phi \sin\lambda = (-z\sin\phi \cos\phi \sin\lambda^2 + s\sin\lambda \cos\phi^2) : R$$

also $u\sin\phi + t\cos\phi \sin\lambda = z\sin\phi \cos\phi \cos\lambda^2 + s\sin\lambda$,

ferner

ferner erhält man

$(u\sin\phi + t\cos\phi \sin\lambda)^2 = (ss\sin\lambda^2 + 2sz\sin\phi \cos\phi \sin\lambda \cos\lambda^2 + zz\sin\phi^2 \cos\phi^2 \cos\lambda^4) : R^2$

$tt\cos\lambda^2 = (ss\cos\phi^2 \cos\lambda^2 - 2sz\sin\phi \cos\phi \sin\lambda \cos\lambda^2 + zz\sin\phi^2 \sin\lambda^2 \cos\lambda^2) : R^2$

also $(u\sin\phi + t\cos\phi \sin\lambda)^2 + tt\cos\lambda^2$

$= ss(1 - \sin\phi^2 \cos\lambda^2) : R^2 + zz\sin\phi^2 \cos\lambda^2 (1 - \sin\phi^2 \cos\lambda^2) : R^2$

und weil $R^2 = 1 - \sin\phi^2 \cos\lambda^2$, so ergiebt sich folgende Gleichung

$ss + zz\sin\phi^2 \cos\lambda^2 = rr\sin\phi^2 \cos\lambda^2$ oder auch $zz = rr - \frac{ss}{\sin\phi^2 \cos\lambda^2}$.

Wenn $s = o$, so wird $z = \pm r$, also $TC = TD = r$: wenn aber $z = o$, so wird $s = \pm r\sin\phi \cos\lambda$, also ist $TA = TB\ r\sin\phi \cos\lambda$, und wenn man $\sin\phi \cos\lambda = \frac{TA}{r}$ in die Gleichung setzt, so wird $zz = rr - \frac{rr}{TA^2} ss$. Demnach ist $CD = 2r$ die Zwergaxe und $AB = 2r\sin\phi \cos\lambda$ die conjugirte Axe der Ellipse, und diese letztere schneidet die Fundamentallinie unter einem Winkel ATE dessen Tangente $= \sin\lambda\, tang\phi$. Es sey der Winkel $= N$, unter welchem der Meridian pLA die Tafel bey N schneidet, so ist $\cos N = \sin\phi \cos\lambda$, also $TA = TB = r\cos N$, wie dem 17 §. gemäß ist. Wenn man $\lambda = o$ setzt, so fallen Tp und TN in TB zusammen, und man erhält die Gleichung sowohl als die übrigen im 17 §. hergeleiteten Formuln, wenn man auch $\phi = 90° - \gamma$ setzt.

26 §.

Man kann auch hier für die orthographische Projection t und u auf eine ähnliche Art, wie im 17 §. ausdrücken. Es war nämlich $x = \frac{t\sin\xi + u\cos VZ \cos\xi}{\sin VZ \sin\xi}$ und $y = \frac{u}{\sin\xi}$, wo $VZ = \varepsilon$ ist.

Man nehme nun $x = \text{TF} = r\cos\text{VL}$ und $y = \text{FL} = r\sin\text{VL}$, so erhält man

$$r\cos\text{VL} = \frac{t\sin\xi + u\cos\text{VZ}\cos\xi}{\sin\text{VZ}\sin\xi}$$

$$r\sin\text{VL} = \frac{u\sin\text{VZ}}{\sin\text{VZ}\sin\xi}.$$

Hieraus folgt $\frac{\cos\text{VL}}{t\sin\xi + u\cos\text{VZ}\cos\xi} = \frac{\sin\text{VL}}{u\sin\text{VZ}}$ oder $u\sin\text{VZ}\cos\text{VL}$ $- t\sin\xi\sin\text{VL} - u\cos\xi\cos\text{VZ}\sin\text{VL} = 0$.

Wenn ferner die erste mit $\cos\text{VL}$, die letzte mit $\sin\text{VL}$ multiplicirt wird, und man addirt beyde, so wird
$u\sin\text{VZ}\sin\text{VL} + t\sin\xi\cos\text{VL} + u\cos\xi\cos\text{VZ}\cos\text{VL} = r\sin\xi\sin\text{VZ}$
Die letzte mit $\sin\text{VZ}$ und die nächstvorhergehende mit $\cos\text{VL}$ multiplicirt und beyde zusammen addirt geben $u\sin\text{VZ} = r\sin\xi\sin\text{VZ}\sin\text{VL}$, also wird $u = r\sin\xi\sin\text{VL}$. Aber die Gleichung $u\sin\text{VZ}\cos\text{VL} - t\sin\xi\sin\text{VL} - u\cos\xi\cos\text{VZ}\sin\text{VL} = 0$ giebt

$u = \frac{t\sin\xi\sin\text{VL}}{\sin\text{VZ}\cos\text{VL} - \cos\xi\cos\text{VZ}\sin\text{VL}}$. Beyde Werthe von u gleich gesetzt geben $t = r(\sin\text{VZ}\cos\text{VL} - \cos\xi\cos\text{VZ}\sin\text{VL})$. Nun war $\tan\text{VZL} = \frac{\sin\xi\sin\text{VL}}{\sin\text{VZ}\cos\text{VL} - \cos\xi\cos\text{VZ}\sin\text{VL}}$, also ist $t = \frac{r\sin\xi\sin\text{VL}}{\tan\text{VZL}}$. Wenn also $\text{T}w = \frac{r\sin\xi\sin\text{VL}}{\tan\text{VZL}}$, $wk = r\sin\xi\sin\text{VL}$, so ist $\frac{wk}{\text{T}w} = \tan\text{VZL} = \frac{\text{WK}}{\text{TW}}$ (23 §.) wie erfordert wird, weil T, K, k, in grader Linie liegen. Weil auch $\sin\xi\sin\text{VL} = \sin\text{ZL}\sin\text{VZL}$, so wird $t = \frac{r\sin\text{ZL}\sin\text{VZL}}{\tan\text{VZL}} = r\sin\text{ZL}\cos\text{VZL}$; und da ferner $\cos\text{VZL} = \frac{\cos\psi\sin\phi}{\sin\text{ZL}}$, so wird $t = r\cos\psi\sin\phi$ und $u = r\sin\text{ZL}\sin\text{VZL} = \frac{r(\sin\psi - \cos\text{ZL}\sin\lambda)}{\cos\lambda}$.

27 §.

27 §.

Bey den Voraussetzungen des 21 §. in Ansehung der Lage des Auges gegen die Tafel, und der Lage des Orts Z gegen den Aequator, die Projectionen so vieler Stundenkreise als verlangt wird, z. Ex. von 15 zu 15 Graden durch Zeichnung zu finden.

Aufl. Um den Mittelpunct T (14 Fig.) sey ein Kreis beschrieben mit dem Halbmesser $= r$, welcher den Horizont, als die Tafel vorstellet, und in demselben ein paar senkrechte Durchmesser GH, BQ, so ist T der Augenpunct, GH die Fundamentallinie BQ die Projection des Meridians des Orts Z. Nun sey z. Ex. $\lambda = 22\frac{1}{2}°$, so nehme man den Bogen $HE = 2 \times 22\frac{1}{2}°$ und ziehe GE, welche BQ in D schneidet, so ist $TD = r\text{tang}22\frac{1}{2}°$, und wenn durch D eine grade Linie CD mit der Fundamentallinie parallel gezogen wird, so liegen die Mittelpuncte aller gesuchten Projectionen in dieser Linie. Man nehme ferner $HF = 90° - 22\frac{1}{2}°$ und ziehe GF, welche BT in P schneidet, so ist P die Projection des Pols, der über dem Horizont liegt, weil $TP = r\text{tang}\frac{90° - 22\frac{1}{2}°}{2}$. An PD lege man die Winkel $DPC = 15°$, $DPI = 30°$, $DPK = 45°$, $DPR = 60°$, $DPr = 75°$, und bemerke die Durchschnittspuncte C, I, K, in der Linie DC, so geben diese die Mittelpuncte der Projectionen derjenigen Stundenkreise ab, die den Meridian unter Winkeln schneiden, welche die Winkel an P zu 90° ergänzen. Also beschreibe man nach der Ordnung mit den Halbmessern CP, IP, KP, u. s. f. Kreise, so hat man die Projectionen der Stundenkreise, die den Meridian unter Winkeln von 75°, 60°, u. s. f. bis 15° schneiden.

Bey Stundenkreisen, die gegen dem Mittagskreis unter sehr kleinen Winkeln geneigt sind, ist man einer ähnlichen Unbequemlichkeit, wie bey den vorigen §§. unterworfen, weil die Halbmesser

der

der Kreise sehr groß ausfallen. Man kann aber in solchen Fällen entweder die Halbmesser selbst aus der Formul $r\sec\lambda \times \mathrm{cosec}\,\phi$ leicht berechnen: oder wenn auch die Verzeichnung der Kreise mit so großen Halbmessern ihre Schwierigkeit hat; so dienen die Formuln des 23 §. für t und u, die Coordinaten selbst zu berechnen, und so viele Puncte in der Projection zu suchen als nöthig ist, um die Projection aus freyer Hand durch diese Puncte zu zeichnen. Dieß letztere hat vornehmlich seinen Nutzen bey Verzeichnung geographischer Charten nach der vom Herrn Hase angerühmten stereographischen Horizontalprojection. Es war aber $t = \frac{r\cos\psi \sin\phi \tan\frac{1}{2}ZL}{\sin ZL} = r\cos VZL \tan\frac{1}{2}ZL$, weil $\cos VZL = \frac{\cos\psi \sin\phi}{\sin ZL}$, und $u = r\sin VZL \tan\frac{1}{2}ZL$. Weil sich nun ϕ für einerley Mittagskreis nicht ändert, so darf man nur ZL, und hierauf VZL berechnen, indem man nach und nach andre Werthe für ψ annimmt, da dann die übrige Rechnung vermittelst der Logarithmen sehr leicht ist. Die Formul $\cos ZL = \sin\psi \sin\lambda + \cos\phi \cos\psi \cos\lambda$ ist hier fast eben so bequem, ZL zu finden, als wenn man auf die sonst gewöhnliche Art das Dreyeck ZpL in zwey rechtwinklichte zerfallet.

Es sey $r = 10000$, $\phi = 1°$, $\psi = 40°$, $\lambda = 22\frac{1}{2}°$, so giebt die Rechnung

$l\sin\psi = 9.8080675$
$l\sin\lambda = 9.5828397$
$19.3909072 - 10$

$l\cos\psi = 9.8842540$
$l\cos\lambda = 9.9656153$
$l\cos\phi = 9.9999338$
$29.8498031 - 20$

$\sin\psi \sin\lambda = 2459842$
$\cos\phi \cos\psi \cos\lambda = 7076250$
$\cos ZL = 9536092$ also $ZL = 17° \; 32'$
und $\frac{1}{2}ZL = 9° \; 46'$.

$l\cos\psi$

$l\cos\psi = 9.8842540$
$l\sin\phi = 8.2418553$
18.1261093
$l\sin ZL = 9.4789423.$
$l\cos VZL = 8.6471670$
$lr\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}ZL = 13.2358589.$
$lt = 21.8830259 - 20.$
$t = 76.425,$

$VZL = 87^\circ\ 27'\tfrac{2}{5}.$
$l\sin VZL = 9.9995719$
$lr\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}ZL = 13.2358589.$
$lu = 23.2354308 - 20.$
$u = 1719.613,$

Man nehme also TY = 1719, 613; und YZ = 76, 425, so ist Z ein Punct in der Projection.

Wenn V ein gegebener Punct in der Projection eines Stundenkreises ist, der z. E. um 30° vom ersten abstehet, so findet man die zugehörige orthographische Projection S eben dieses Puncts auf eben die Art, wie im 18 §. Man ziehet TV, fasset TD = TV, und ziehet DG, welche den Kreis GBHQ in E schneidet. Aus E setzet man EX auf GH senkrecht, und nimmt sodann TS = EX, so ist S die orthographische Projection desselben Puncts, wovon V die stereographische ist.

28 §.

Es bleibe noch alles wie im 21 §. (12 Fig.) in Ansehung der Lage des Auges, der Tafel, und des Orts *Z* gegen den Aequator *ÆQ*; nur sey statt des Stundenkreises ein Parallelkreis *BLD* des Aequators gegeben, dessen Abstand vom Aequator *MD* = ψ bekannt ist: man soll seine Projection auf der Tafel suchen.

Aufl. Der Parallelkreis schneide den Meridian des Orts Z in der graden Linie NM, und C sey sein Mittelpunct, BD sey ein Durchmesser desselben auf MN senkrecht, so ist BD auf der Ebene des Meridians senkrecht und mit TW parallel. Ferner ist

CV mit ÆQ, des Aequators und Meridians Durchschnitt, parallel, und CM schneidet TZ in E. Aber die erweiterte Ebene des Parallelkreises schneidet die Fundamentalebene in der Linie EF, so daß EF mit TW parallel ist und TEF = 90°, weil beyde Ebenen, also auch EF auf dem Meridian senkrecht sind. Es sey LF auf EF senkrecht, und schneide BD in f. Da nun der Winkel ETQ = λ, weil der Bogen QZ sein Maas ist, so ist auch CET = λ. Dieser Winkel aber ist der Neigungswinkel der Ebene des Parallelkreises gegen die Fundamentalebene. Also wird in den allgemeinen Formuln des 9 §. $d = \lambda$. Ueberdem ist $\eta = 0$, $a = 0$, $\delta = r$, also $\sin\eta = 0$, $\cos\eta = 1$. Dieß in den allgemeinen Formuln des 9 §. gesetzt giebt

$$x = \frac{(c+r)t}{u\cot\lambda + r} = \frac{(c+r)\,t\sin\lambda}{u\cos\lambda + r\sin\lambda}, \text{ und}$$

$y = \dfrac{(c+r)u}{u\cos\lambda + r\sin\lambda}$. Weil nun TE $= c$ ist, so wird CE $= c.\cos\lambda$ $=$ Ff. Ueberdem ist EF $=$ C$f = x$, FL $= y$; aber FL $=$ Ff — fL, also $y = c.\cos\lambda - f$L, und fL $= c.\cos\lambda - y$. Weil ferner MQ $= \psi$, so ist CT $= r\sin\psi$, CM $=$ CB $=$ CL $= r\cos\psi$. Nun hat man für den Parallelkreis die Gleichung C$f^2 + f$L$^2 =$ CL^2. Setzt man hier die gefundenen Werthe statt Cf, fL und CL, so erhält man zwischen x und y die Gleichung $xx + (y - c.\cos\lambda)^2 - rr.\cos\psi^2 = 0$.

Nun ist $y - c.\cos\lambda = \dfrac{(c+r)u}{u\cos\lambda + r\sin\lambda} - c.\cos\lambda$

$= \dfrac{(c\sin\lambda^2 + r)u - cr\sin\lambda\cos\lambda}{u\cos\lambda + r\sin\lambda}$. Dieß nebst dem Werth

$x = \dfrac{(c+r)\,t\sin\lambda}{u\cos\lambda + r\sin\lambda}$ in die Gleichung gesetzt giebt

$$\begin{array}{llll}(c+r)^2\sin\lambda^2.\,tt + cc\sin\lambda^4. & uu - 2ccr\sin\lambda^3\cos\lambda.\,u & + ccrr\sin\lambda^2\cos\lambda^2 & = 0\\ + 2cr\sin\lambda^2 & - 2crr\sin\lambda\cos\lambda & - r^4\cos\psi^2\sin\lambda^2 & \\ + rr & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} + rr & - 2r^3\cos\psi^2 \cos\lambda \sin\lambda \\ - rr \cos\lambda^2 \cos\psi^2 & \end{array}$$

Es ist aber $rr(1-\cos\lambda^2 \cos\psi^2) = rr(\sin\lambda^2 + \cos\lambda^2 \sin\psi^2)$, und wenn man dieß substituirt, sodann aber alles mit $\sin\lambda^2$ dividirt, so wird

$$\begin{array}{lll} (c+r)^2\, tt + cc\sin\lambda^2. & uu - 2ccr\sin\lambda \cos\lambda.\ u & + crr\cos\lambda^2 = 0. \\ + 2cr & - \dfrac{2crr\cos\lambda}{\sin\lambda} & - r^4\cos\psi^2 \\ + rr & & \\ + \dfrac{rr\cos\lambda^2 \sin\psi^2}{\sin\lambda^2} & - \dfrac{2r^3\cos\psi^2 \cos\lambda}{\sin\lambda} & \end{array}$$

Nun ist $CE = CT \cot\lambda$ und $CT = r\sin\psi$, also $CE = r\sin\psi \cot\lambda$, und $TE = \surd(CT^2 + CE^2) = c = r\sin\psi \surd(1+\cot\lambda^2) = r\sin\psi \operatorname{cosec}\lambda$, oder $c = \dfrac{r\sin\psi}{\sin\lambda}$. Daraus folgt ferner $2rcc\sin\lambda \cos\lambda = \dfrac{2r^3\sin\psi^2 \cos\lambda}{\sin\lambda}$.

Aber es ist $\dfrac{2r^3\cos\psi^2 \cos\lambda}{\sin\lambda} = \dfrac{2r^3\cos\lambda}{\sin\lambda} - \dfrac{2r^3\sin\psi^2 \cos\lambda}{\sin\lambda}$, folglich $2rcc\sin\lambda \cos\lambda + \dfrac{2r^3\cos\psi^2 \cos\lambda}{\sin\lambda} = \dfrac{2r^2\cos\lambda}{\sin\lambda}$. Dieß in die gefundene Gleichung zwischen t und u gesetzt giebt

$$\begin{array}{lll} (c+r)^2\, tt + cc\sin\lambda^2. & uu - \dfrac{2r^3\cos\lambda}{\sin\lambda}.\ u & + ccrr\cos\lambda^2 = 0. \\ + cc.\cos\lambda^2 & - r^4\cos\psi^2 & \\ + 2cr & - \dfrac{2crr\cos\lambda}{\sin\lambda} & \\ + rr & & \end{array}$$

oder $(c+r)^2 (tt+uu) - 2rr(c+r)\cot\lambda.\, u + ccrr\cos\lambda^2 - r^4\cos\psi^2 = 0.$

Nun kann man ferner $c = \dfrac{r\sin\psi}{\sin\lambda}$ substituiren, und man erhält die Gleichung

$(\frac{\sin\psi}{\sin\lambda} + 1)^2 (tt + uu) - 2rr(\frac{\sin\psi}{\sin\lambda} + 1) u\cot\lambda + \frac{rr\sin\psi^2 \cos\lambda^2}{\sin\lambda^2} - r^2$

$\cos\psi^2 = o,$

und diese gehörig geordnet giebt

$$tt + uu - \frac{2r\cos\lambda}{\sin\psi + \sin\lambda} u + \frac{rr(\sin\psi^2 \cos\lambda^2 - \cos\psi^2 \sin\lambda^2)}{(\sin\psi + \sin\lambda)^2} = o.$$

Wenn man nun $t = o$ setzt, so ergiebt sich $u = \frac{r\cos\lambda}{\sin\psi + \sin\lambda}$ $\pm \frac{r\cos\psi}{\sin\psi + \sin\lambda}$, welches sich auch so ausdrücken läßt

$u = \frac{r(\cos\lambda + \cos\psi)}{\sin\psi + \sin\lambda}$. Es ist aber $\frac{\cos\lambda + \cos\psi}{\sin\lambda + \sin\psi} = \cot\frac{1}{2}(\psi + \lambda)$ $= \tang\frac{1}{2}\, 180° - (\psi + \lambda)$, und $\frac{\cos\lambda - \cos\psi}{\sin\lambda + \sin\psi} = \tang\frac{1}{2}(\psi - \lambda)$. Also ist der eine Werth $u = r\cot\frac{1}{2}(\psi + \lambda)$, der andre $u = r\tang\frac{1}{2}(\psi - \lambda)$, wie auch aus Betrachtung der Figur leicht erhellet. Ist nun die Projection ak (10 Fig.) auf der Ebene der Tafel gezeichnet, so daß T der Augenpunct und GH die Fundamentallinie ist, und man nimmt $TC = \frac{r\cos\lambda}{\sin\psi + \sin\lambda}$, $Ca = -\frac{r\cos\psi}{\sin\psi + \sin\lambda}$, $Cb =$ $+\frac{r\cos\psi}{\sin\psi + \sin\lambda}$, so sind die Puncte a und b in der Projection. Es sey ef mit GH parallel, und schneide WK in w, so ist $Cw = TW = t$. Man setze $wk = z$, so wird $\frac{r\cos\lambda}{\sin\psi + \sin\lambda} - z = u$, und dieß statt u gesetzt giebt zwischen $Cw = t$, und $WK = Z$ die Gleichung

$$tt + (-z + \frac{r\cos\lambda}{\sin\psi + \sin\lambda})^2 - \frac{2r\cos\lambda}{\sin\psi + \sin\lambda}(-z + \frac{r\cos\lambda}{\sin\psi + \sin\lambda})$$
$$+ \frac{rr(\sin\psi^2 \cos\lambda^2 - \cos\psi^2 \sin\lambda^2)}{(\sin\psi + \sin\lambda)^2} = o$$

oder $tt + zz + \frac{rr(\sin\psi^2 \cos\lambda^2 - \cos\psi^2 \sin\lambda^2 - \cos\lambda^2)}{(\sin\psi + \sin\lambda)^2} = o.$

Es

Es ist aber $(\sin\psi^2 - 1)\cos\lambda^2 - \cos\psi^2 \sin\lambda^2 = -\cos\psi^2 \cos\lambda^2 - \cos\psi^2 \sin\lambda^2 = -\cos\psi^2$. Also erhält man $tt + zz = \frac{\cos\psi^2}{(\sin\psi + \sin\lambda)^2}$, und die Projection ist ein Kreis, dessen Halbmesser $= \frac{r\cos\psi}{\sin\psi + \sin\lambda}$, und dessen Mittelpunct C ist. Die Mittelpuncte der Projectionen aller Parallelkreise liegen also in der graden Linie TC, welche die Projection des Meridians ist. Nimmt man auf dieser Linie $Ta = r\tang\frac{1}{2}(\psi - \lambda)$ $Tb = r\tang(90° - \frac{1}{2}(\psi + \lambda))$, und halbirt ab bey C, so ist C der Mittelpunct und $Ca = Cb$ der Halbmesser.

Wenn $\psi = o$ ist, oder der Parallelkreis der Aequator selbst wird, so hat man $Ta = -r\tang\frac{1}{2}\lambda$ und $Tb = \tang(90 - \frac{1}{2}\lambda) = \cot\frac{1}{2}\lambda$.

29 §.

Wenn der Abstand des Puncts L vom Meridian, oder sein Stundenwinkel $ZpL = \phi$ gegeben ist, so ist die Lage dieses Puncts und also x und y bestimmt. Es wird nämlich $x = EF = Cf = r\cos\psi \sin\phi$, und $fL = r\cos\psi \cos\phi$, also $y = FL = Ff - fL = c.\cos\lambda - r\cos\psi\cos\phi = \frac{r\sin\psi \cos\lambda}{\sin\lambda} - r\cos\psi\cos\phi$, weil $c = \frac{r\sin\psi}{\sin\lambda}$.

Nun waren die allgemeinen Werthe diese

$$x = \frac{(\frac{r\sin\psi}{\sin\lambda} + r)\, t\sin\lambda}{u\cos\lambda + r\sin\lambda} = \frac{r(\sin\psi + \sin\lambda)t}{u\cos\lambda + r\sin\lambda}$$

$$y = \frac{(\frac{r\sin\psi}{\sin\lambda} + r)u}{u\cos\lambda + r\sin\lambda} = \frac{r(\sin\psi + \sin\lambda)u}{u\cos\lambda\sin\lambda + r\sin\lambda^2}$$

Diese Werthe setze man den vorigen gleich, so wird

$$\cos\psi \sin\phi = \frac{(\sin\psi + \sin\lambda)t}{u\cos\lambda + r\sin\lambda}$$

$$\frac{\sin\psi\cos\lambda}{\sin\lambda} - \cos\psi\cos\phi = \frac{(\sin\psi + \sin\lambda)u}{u\cos\lambda\sin\lambda + r\sin\lambda^2}$$

oder $\sin\psi\cos\lambda - \cos\psi\cos\phi\sin\lambda = \dfrac{(\sin\psi + \sin\lambda)u}{u\cos\lambda + r\sin\lambda}$

Aus beyden folgt

$$\frac{\cos\psi\sin\phi}{t} = \frac{\sin\psi\cos\lambda - \cos\psi\cos\phi\sin\lambda}{u}$$

oder $u = \dfrac{\sin\psi\cos\lambda - \cos\psi\cos\phi\sin\lambda}{\cos\psi\sin\phi}t.$

Aus der ersten, welche ebenfalls t und u enthält, erhält man

$$u\cos\lambda + r\sin\lambda = \frac{(\sin\psi + \sin\lambda)t}{\cos\psi\sin\phi}$$

also $u = \dfrac{(\sin\psi + \sin\lambda)t - r\sin\lambda\cos\psi\sin\phi}{\cos\lambda\cos\psi\sin\phi}.$

Beyde Werthe von u gleich gesetzt geben

$(\sin\psi + \sin\lambda - \sin\psi\cos\lambda^2 + \cos\psi\cos\phi\sin\lambda\cos\lambda)t = r\sin\lambda\sin\phi\cos\psi$

oder $(1 + \sin\psi\sin\lambda + \cos\psi\cos\phi\cos\lambda)t = r\sin\phi\cos\psi.$

Also wird $t = \dfrac{r\sin\phi\cos\psi}{1 + \sin\psi\sin\lambda + \cos\psi\cos\phi\cos\lambda}$

und $u = \dfrac{(\sin\psi\cos\lambda - \cos\psi\cos\phi\sin\lambda)r}{1 + \sin\psi\sin\lambda + \cos\psi\cos\phi\cos\lambda}.$

Nun war im 23 §. $\sin\psi\sin\lambda + \cos\psi\cos\phi\cos\lambda = \cos ZL$, und $\sin\psi\cos\lambda - \cos\psi\cos\phi\sin\lambda = \dfrac{\cos\psi\sin\phi}{\tang pZL}$, also wird $t = \dfrac{r\sin\phi\cos\psi}{1+\cos ZL}$

und $u = \dfrac{\cos\psi\sin\phi}{\tang pZL\,(1+\cos ZL)}$. Weil überdem $1 + \cos ZL = \dfrac{\sin ZL}{\tang\frac{1}{2}ZL}$, und $\cos\psi\sin\phi = \sin ZL\cos VZL = \sin ZL\sin pZL$, so wird $t = r\tang\frac{1}{2}ZL\sin pZL = r\tang\frac{1}{2}ZL\cos VZL$, und

$u = \dfrac{r\tang\frac{1}{2}ZL\sin pZL}{\tang pZL} = r\tang\frac{1}{2}ZL\cos pZL = r\tang\frac{1}{2}ZL\sin VZL.$

Eben

Eben diese Ausdrücke sind im 23 §. gefunden worden, wo auch t und u aus eben denselben Datis gesucht wurde. Uebrigens ist die Auflösung der Aufgabe des 19 §. ein besondrer Fall von der gegenwärtigen, und wenn man in den Formuln, die hier erwiesen sind, $\lambda = o$, $\phi = 90° - \gamma$ setzt, so ergeben sich alle die Formuln des 19 §.

30. §.

Bey eben der Lage des Parallelkreises BLD gegen die Tafel und das Auge, wie im 28 §. die orthographische Projection desselben zu finden.

Aufl. Wenn man in den Formuln des 10 §. für die orthographische Projection, nämlich $x = t\sec\eta + b\sin\eta\cos\eta - u\tan g\eta\cot d$, und $y = \frac{u}{\sin d}$, wie hier erfordert wird, $\eta = o$ und $d = \lambda$ setzt, so wird $x = t$, und $y = \frac{u}{\sin\lambda}$. Nun war die Gleichung des Parallelkreises zwischen x und y diese $xx + yy - 2cy\cos\lambda + cc.\cos\lambda^2 = rr\cos\psi^2$, also erhält man zwischen t und u diese Gleichung

$$tt + \frac{uu}{\sin\lambda^2} - \frac{2cu\cos\lambda}{\sin\lambda} + cc.\cos\lambda^2 = rr\cos\psi^2.$$

Da nun überdem $c = \frac{r\sin\psi}{\sin\lambda}$, so wird

$$tt + \frac{uu}{\sin\lambda^2} - \frac{2r\sin\psi\cos\lambda}{\sin\lambda^2}u + \frac{rr\sin\psi^2\cos\lambda^2}{\sin\lambda^2} = rr\cos\psi^2.$$

Wenn man $t = o$ setzt, so wird

$uu - 2r\sin\psi\cos\lambda.\ u + rr\sin\psi^2\cdot\cos\lambda^2 = rr\cos\psi^2$ und dieß giebt $u = r(\sin\psi\cos\lambda \pm \cos\psi\sin\lambda)$. Also ist einmal $u = r\sin(\psi + \lambda)$, und zweytens auch $u = r\sin(\psi - \lambda)$. Es sey nun $TC = r\sin\psi\cos\lambda$, (10 Fig.) und überdem $Ca = -r\cos\psi\sin\lambda$, $Cb = +r\cos\psi\sin\lambda$, so sind a und b in der Projection. Ferner sey

durch

durch C mit der Fundamentallinie GH die Parallele ef gezogen, welche WK in w schneidet, und man setze $WK = Z$, so wird $WK = Ww - wK$ oder $u = r\sin\psi \cos\lambda - z$. Dieß in die Gleichung zwischen t und u gesetzt, giebt zwischen $Cw = t$, und $WK = z$, Diese Gleichung

$$tt\sin\lambda^2 + zz - 2rz\sin\psi\cos\lambda + 2rr\sin\psi^2\cos\lambda^2 = rr\cos\psi^2\sin\lambda^2 + 2rz\sin\psi\cos\lambda - 2rr\sin\psi^2\cos\lambda^2$$

oder $zz = rr\cos\psi^2\sin\lambda^2 - tt\sin\lambda^2$. Demnach ist die Projection eine Ellipse, C ihr Mittelpunct, $Ca = Cb = r\cos\psi\sin\lambda$ ihre conjugirte Axe, und $Ce = Cf = r\cos\psi$ ihre Zwergaxe.

Wenn des Puncts L Stundenwinkel $ZpL = \phi$, und also $EF = r\cos\psi\sin\phi$, $FL = \frac{r\sin\psi\cos\lambda}{\sin\lambda} - r\cos\psi\cos\phi$ ist, so erhält man $t = r\cos\psi\sin\phi$, und $u = r\sin\psi\cos\lambda - r\cos\psi\cos\phi\sin\lambda$. Ist nun für die orthographische Projection $Tw = t$, $wk = u$, so hat man $\frac{wk}{Tw} = \frac{(\sin\psi\cos\lambda - \cos\psi\cos\phi\sin\lambda)}{\cos\psi\sin\phi} = \frac{WK}{TW}$ (29 §.) wie erfordert wird. Ueberdem ist $\cos\psi\sin\phi = \sin ZL \cos VZL$, und $\sin\psi\cos\lambda - \cos\psi\cos\phi\sin\lambda = \frac{\cos\psi\sin\phi}{\cot VZL}$, also $Tw = r\sin ZL\cos VZL$, $wk = \frac{r\cos\psi\sin\phi}{\cot VZL} = \frac{r\sin ZL\cos VZL}{\cot VZL} = r\sin ZL\sin VZL$, folglich $Tk = \surd(Tw^2 + wK^2) = r\sin ZL$. Aber $TK = \surd(TW^2 + TK^2) = r\tan\frac{1}{2}ZL$ also $TK : Tk = \tan\frac{1}{2}ZL : \sin ZL$, wie nach dem 15 §. erfordert wird.

31 §.

Unter den Bedingungen des 28 §. (14 Fig.) die Projectionen so vieler Parallelkreise als verlangt wird, z. Ex. von 10 zu 10 Graden, auf der Tafel durch Zeichnung zu finden,

finden, wenn die geographische Breite λ des Orts Z gegeben ist.

Aufl. Es sey z. E. $\lambda = 22\frac{1}{2}°$, wie im 27 §. Man mache den Bogen HA $= 22\frac{1}{2}°$ und ziehe AG, welche PQ in N schneidet, so gehet die Projection des Aequators durch N. Man nehme auch den Bogen BL $= 22\frac{1}{2}°$, und ziehe GL, welche TP verlängert in M schneidet, halbire MN in c, so ist c der Mittelpunct der Projection des Aequators. Denn es ist TN $= -\tang\frac{1}{2}\lambda$ und TM $= \tang\frac{180°-\lambda}{2} = \tang(90° - \frac{1}{2}\lambda) = \cot\frac{1}{2}\lambda$. Nun ist der Bogen LBA ein Halbkreis. Diesen theile man von 10° zu 10° ein, und zehle die Grade sowohl von L als auch von A aufwärts bis 90°. Hierauf ziehe man die graden Linien G10 und G10 auf beyden Seiten, diese werden PQ in a und b schneiden: da dann ab in e halbirt den Mittelpunct der Projection des Parallelkreises von 10° Breite giebt. Es ist nämlich T$a = r\tang\frac{1}{2}(-22\frac{1}{2}° + 10°)$ und Tb $= r\tang\frac{1}{2}(180° -)(22\frac{1}{2}° + 10°) = \tang(90° - \frac{22\frac{1}{2}° + 10°}{2}$. Wenn man ferner die Linien G20 und G20, G30, und G30, u. s. f. ziehet, so ergeben sich auf eben die Art die Mittelpuncte der Projectionen aller übrigen Parallelkreise auf dieser Seite des Aequators.

Für diejenigen Parallelkreise, die auf der andern Seite des Aequators liegen, wird ψ negativ, und man darf nur den andern Halbkreis AGL auf eben die Art eintheilen, auch mit der übrigen Verzeichnung völlig, wie vorhin verfahren. Wenn $\psi = -\lambda$ ist; so geht die Projection durch D, wenn TD $= -r\tang\frac{1}{2}2\lambda = -r\tang\lambda$ genommen wird, und die Projection selbst ist eine grade Linie mit GH parallel, weil $r\tang(90° - \frac{-\psi+\lambda}{2} = r\tang 90°$ unendlich groß wird.

Die Halbmesser derjenigen Parallelkreise werden hier wiederum sehr groß, die mit dem Ort Z eine entgegengesetzte, sonst aber beynahe gleiche Breite haben. Man findet durch die gelehrte Verzeichnung eigentlich die beyden äußersten Puncte des Durchmessers der gesuchten Kreise, daher ist der eigentlich gesuchte Mittelpunct allemal nur ungefähr halb so weit von T entfernt, als die höchste Spitze des Durchmessers, den die Verzeichnung giebt. Statt dieser bey etwas großen Kreisen ziemlich unbequemen Verzeichnung kann man mit mehr Vortheil den gesuchten Halbmesser, nebst der Puncte a Entfernungen, von T berechnen. Da der Halbmesser $= \frac{r\cos\psi}{\sin\psi + \sin\lambda} = \frac{r\cos\psi}{2\sin\frac{1}{2}(\psi+\lambda)\cos\frac{1}{2}(-\lambda)}$, und $Ta = r\tang\frac{1}{2}(\psi-\lambda)$ ist, so läßt sich die Berechnung vermittelst der Logarithmen leicht bewerkstelligen. Diejenigen Parallelkreise, welche dem Parallelkreis des Auges sehr nahe liegen, lassen sich auch durch Puncte verzeichnen, die man aus den Formuln für t und u durch Rechnung findet, dafern der Halbmesser so groß seyn sollte, daß die sonst gewöhnliche Verzeichnung des Kreises zu viel Schwierigkeit hätte.

Es sey $r = 10000$, $\lambda = 50°$, $\psi = -20°$, $\lambda = 22\frac{1}{2}°$, so wird $\cos ZL = \cos\psi \cos\lambda \cos\lambda - \sin\psi \sin\lambda$

$l\cos\psi = 9.9729858$	$l\sin\psi = 9.5340517$
$l\cos\phi = 9.8080675$	$l\sin\lambda = 9.5828397$
$l\cos\lambda = 9.9656153$	$19.1168914-10$
$29.7466686-20$	

$\cos\psi \cos\phi \cos\lambda = 5580443$

$\sin\psi \sin\lambda = 1308854$

$\cos ZL = 4271589$

Also $ZL = 64° \; 42\frac{3}{4}'$, $\frac{1}{2}ZL = 32° \; 21\frac{3}{8}'$.

$l\cos\psi$

$l\cos\psi = 9.9729858$ $\qquad$ $VZL = 37° \; 14\frac{1}{4}'$

$l\sin\phi = 9.8842540$

19.8572398 $\qquad$ $\sin VZL = 9.7818417$

$l\sin ZL = 9.9562529$ $\qquad$ $lr\tan g \frac{1}{2} ZL = 13.8017800$

$l\cos VZL = 9.9009869$ $\qquad$ $23.5836217 - 20$

$lr\tan g \frac{1}{2} ZL = 13.8017800$ $\qquad$ Also $t = 5043, 9$

$23.7027669 - 20.$ $\qquad$ $u = 3833, 7$

Nimmt man demnach $t = TW = 5043, 9$, und unter der Fundamentallinie $WK = 3833, 7$, so ist K in der Projection. Es wird nämlich u negativ, weil $\sin\psi$ also auch $\sin VZL$ $= \frac{\sin\psi - \cos ZL \sin\lambda}{\sin ZL \cos\lambda}$ negativ ist.

32 §.

Es sey der größte Kreis ♈♋♎♑ die Ecclipti, ihre Pole Π und π, der Colur der Nachtgleichen Π♈♎, der Colur der Sonnenstände Π♋π♑, so liegt die Axe des Aequators pq im Colur der Sonnenstände. **Nun ist ein Punct** Z **in der Ecliptik gegeben, und das Auge stehet im Nadir desselben, die Tafel ist ein Breitenkreis** $\Pi G\pi H$. **Man sucht die Projection der Axe des Aequators** Tp.

Aufl. Da hier wiederum $a = o$, und $\delta = r$ ist, so gelten die obigen Formuln nämlich

$$x = \frac{ru\sin\eta \cot d - (b\sin\eta \cos\eta + r)t - rb\sin\eta^2.}{t\sin\eta - u\cot d - r\cos\eta}$$

$$y = \frac{(b\sin\eta + r\cos\eta)u}{u\cos d - t\sin\eta \sin d + r\cos\eta \sin d}.$$

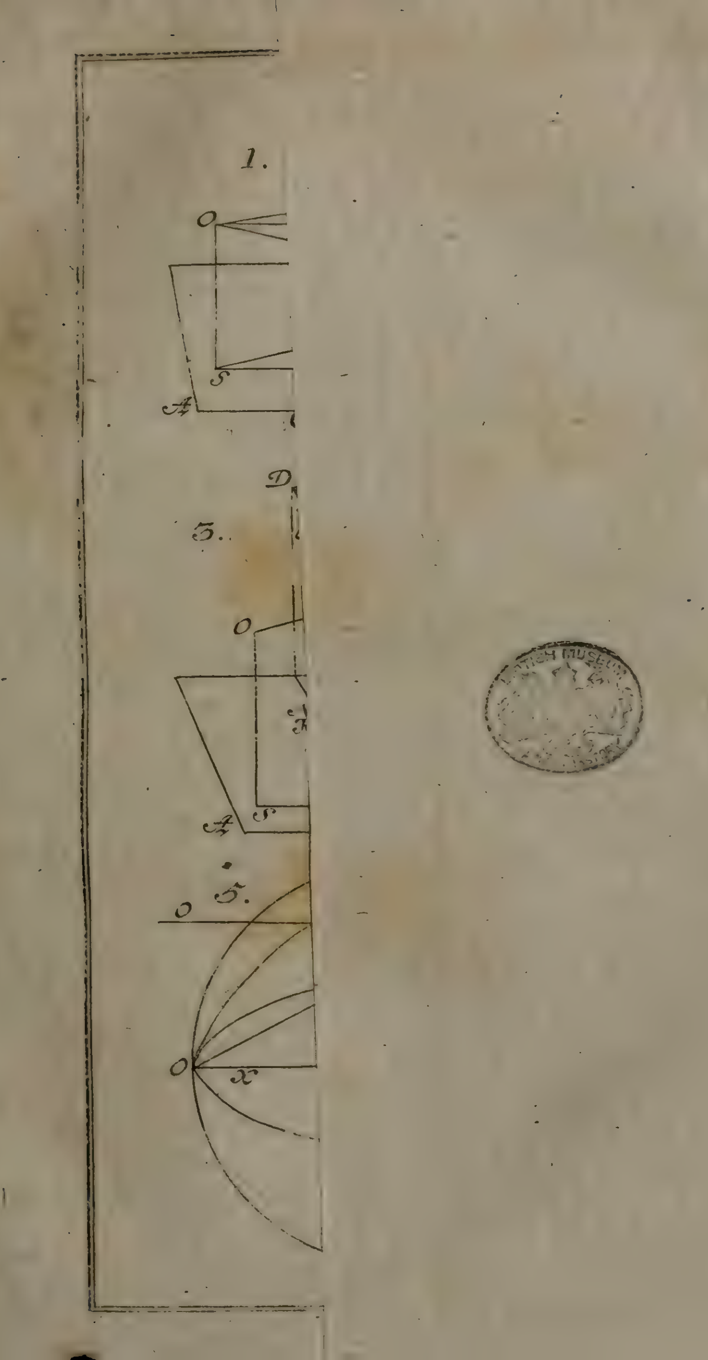
Ueberdem ist $b = o$, $d = 90$, also wird $x = \frac{rt}{r\cos\eta - t\sin\eta}$, $y = \frac{ru\cos\eta}{r\cos\eta - t\sin\eta}$. Hier ist nun der Winkel $GTF = \eta$, wovon

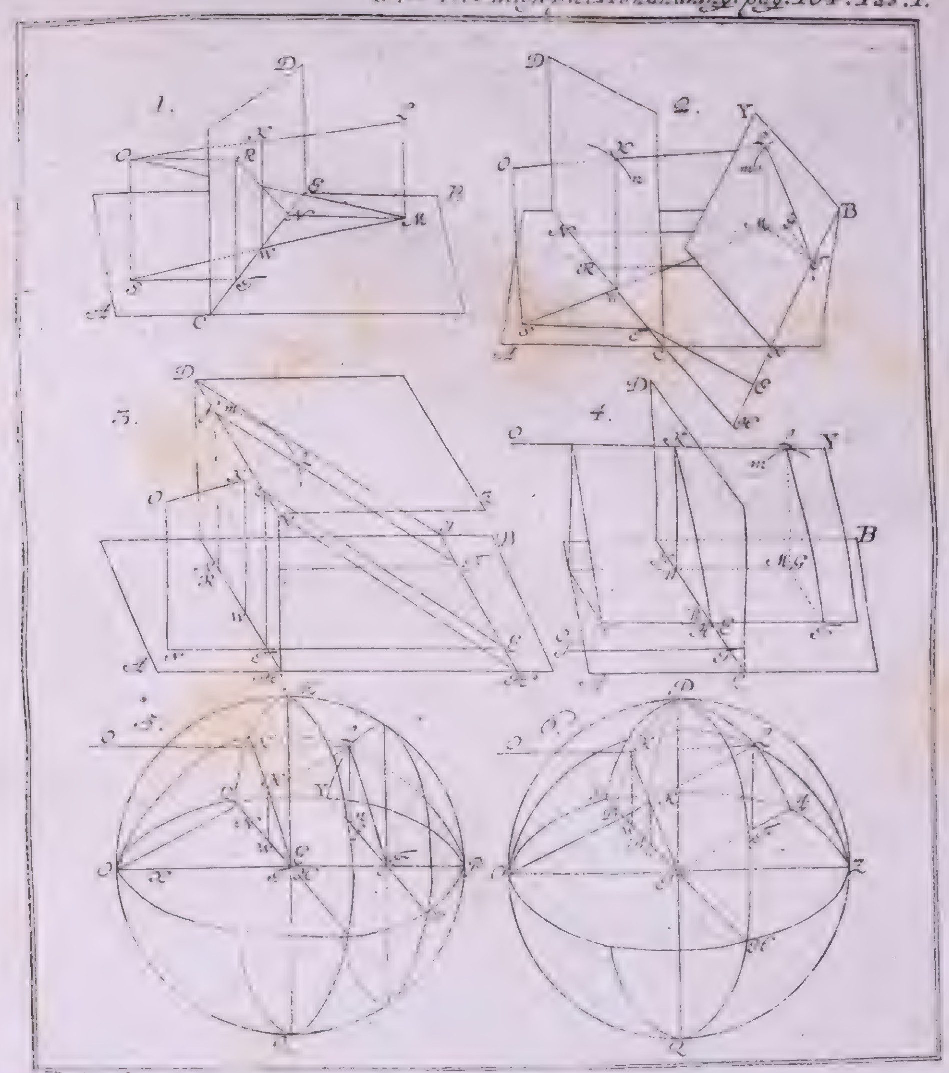
der Bogen G♋ das Maas ist. Weil nun der Bogen ♈♋ = 90 = GZ, so ist der Bogen G♋ = VZ = dem Abstand des Puncts Z in der Eccliptik vom Anfangspunct des Widders, und η das, was in der Astronomie die Länge des Puncts Z heißen würde. Nun sey die Schiefe der Ecckiptik $p\Pi = \varepsilon$, so ist TF : Fp = 1 : cotε = $x : y$, daher hat man zwischen x und y die Gleichung $\frac{y}{x} = \cot\varepsilon$. Dieß giebt $\frac{u \cos\eta}{t} = \cot\varepsilon$, oder $u = \frac{\cot\varepsilon}{\cos\eta} t$ für die Gleichung der Projection, welches, wie man auch aus andern Gründen weis, eine grade Linie seyn muß. Es wird also $\tang PTW = \frac{u}{t} = \frac{\cot\varepsilon}{\cos\eta}$, oder $\tang \Pi TP = \frac{\cos\eta}{\cot\varepsilon}$.

Eben dieß folgt auch aus den Gründen der sphärischen Trigonometrie sehr leicht. Es ist nämlich η = dem sphärischen Winkel $p\Pi E$, der Bogen $\Pi p = \varepsilon$, und ZpCO ein größter Kreis, der auf der Tafel senkrecht steht, so daß der Winkel bey C = 90° ist. Also hat man im sphärischen Dreyeck $p\Pi C$ $\tang \Pi C = \cos\eta . \tang\varepsilon = \frac{\cos\eta}{\cot\varepsilon} = \tang PT\Pi$, wie vorhin. Eben der Bogen ΠC ist das Maas des sphärischen Winkels $pZ\Pi$, und CG das Maas des sphärischen Winkels pZG, d. i. dem Winkel der Ecckiptik mit dem Meridian des Orts Z. Also ist PTΠ so groß, als der Winkel der Ecckiptik mit dem Parallelkreis des Aequators. Den Ausdruck $\tang PZG = \tang PTW = \frac{\cot\varepsilon}{\cos\eta}$ giebt auch die Auflösung des sphärischen Dreyecks pZ♋, worinn p♋ $= 90° - \varepsilon$, und ♋Z $= 90° - \eta$ ist.

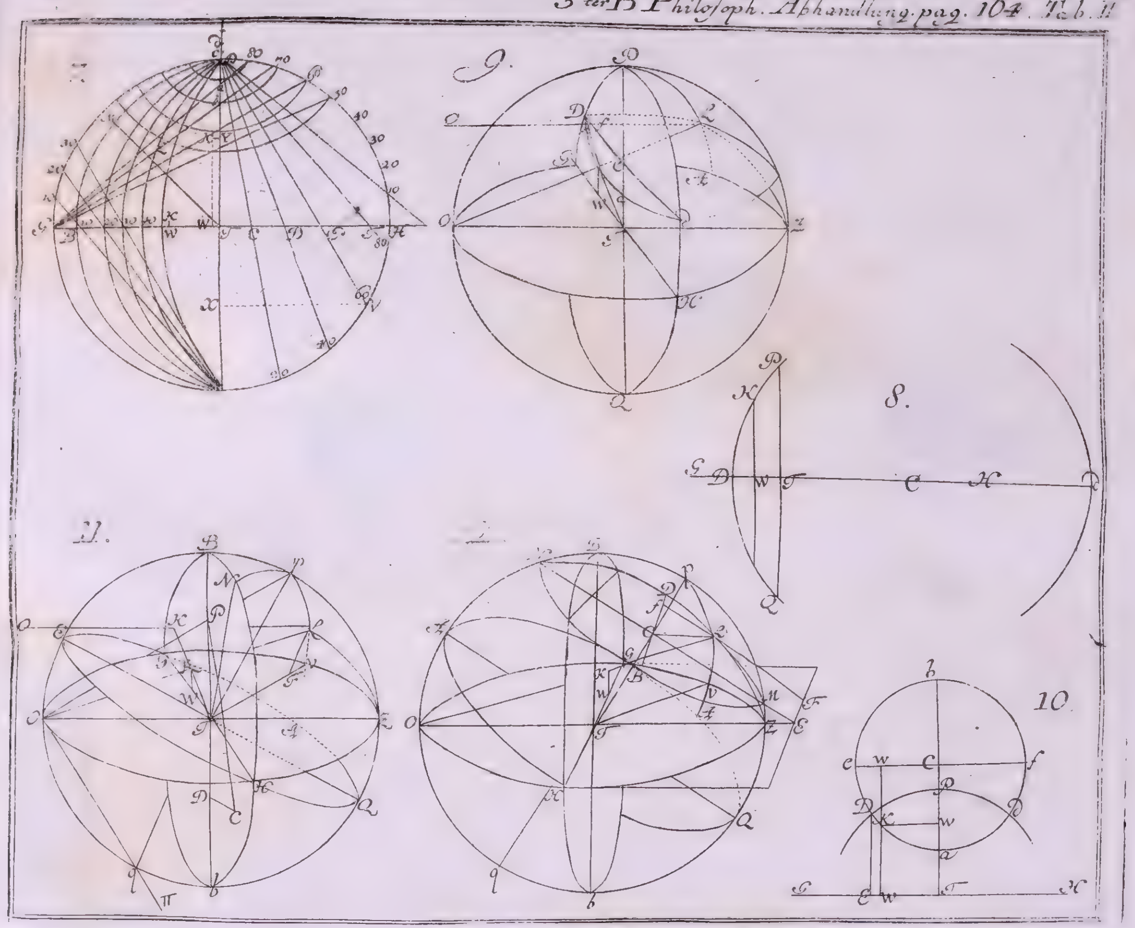
Ich habe diese Aufgabe deswegen beygefügt, um zu zeigen, wie die ganze Verzeichnung von der Projection der Erdkugel, der man sich bey den Sonnenfinsternissen, nach der vom Herrn Lambert beschriebenen, und oben angeführten Methode, mit Vortheil bedienen kann, aus den allgemeinen Formuln fließt.

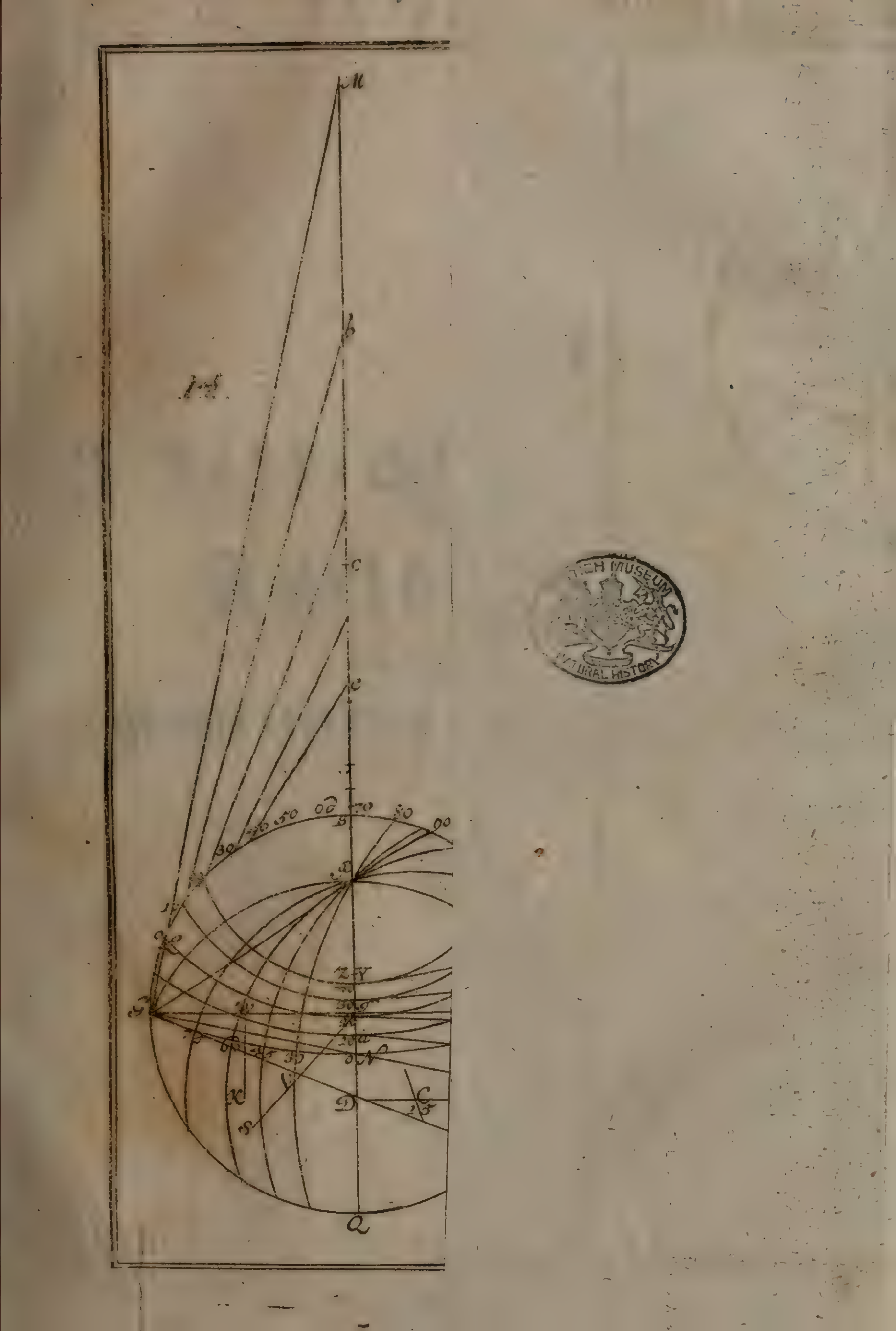
Johann

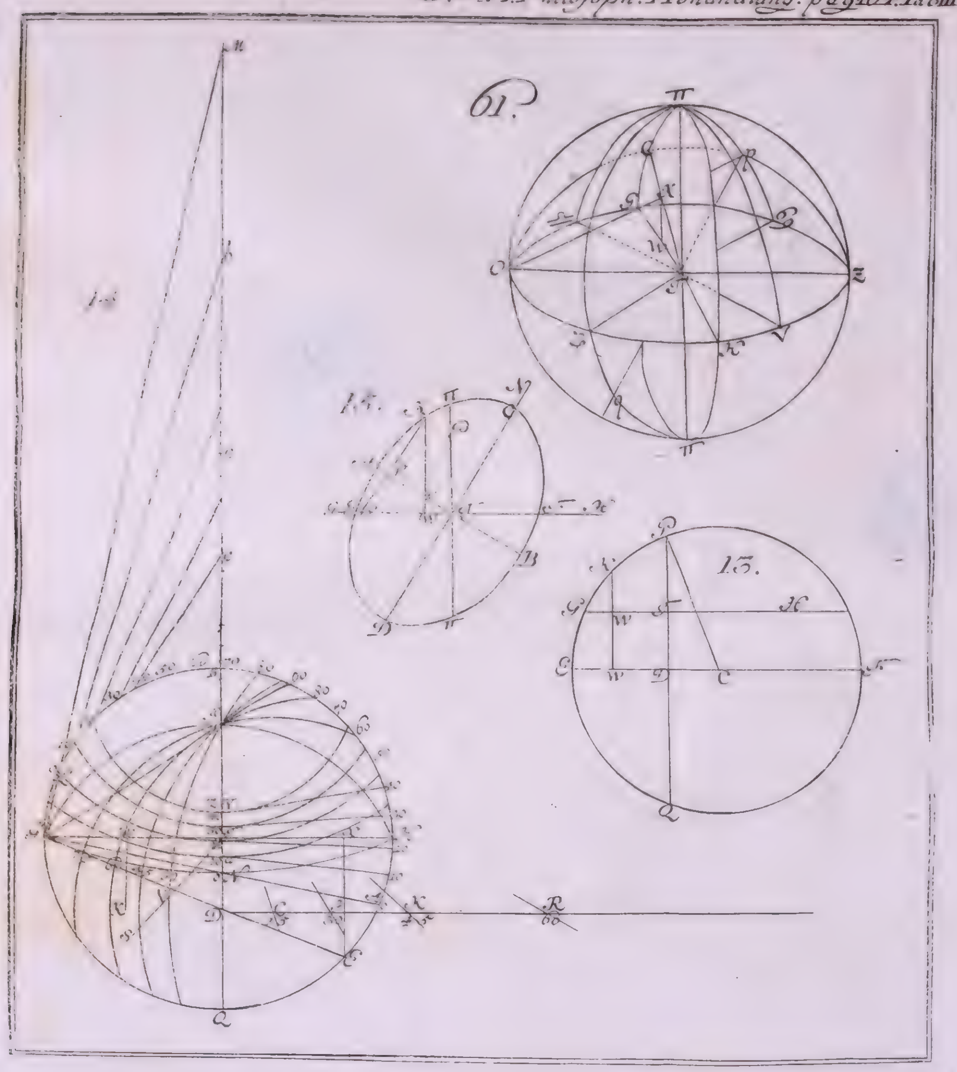

1.
O
S
A
D
3.
O
S
A
5.
O
O
x


1.
2.
3.
4.
D
O
Y
B
Z
Q



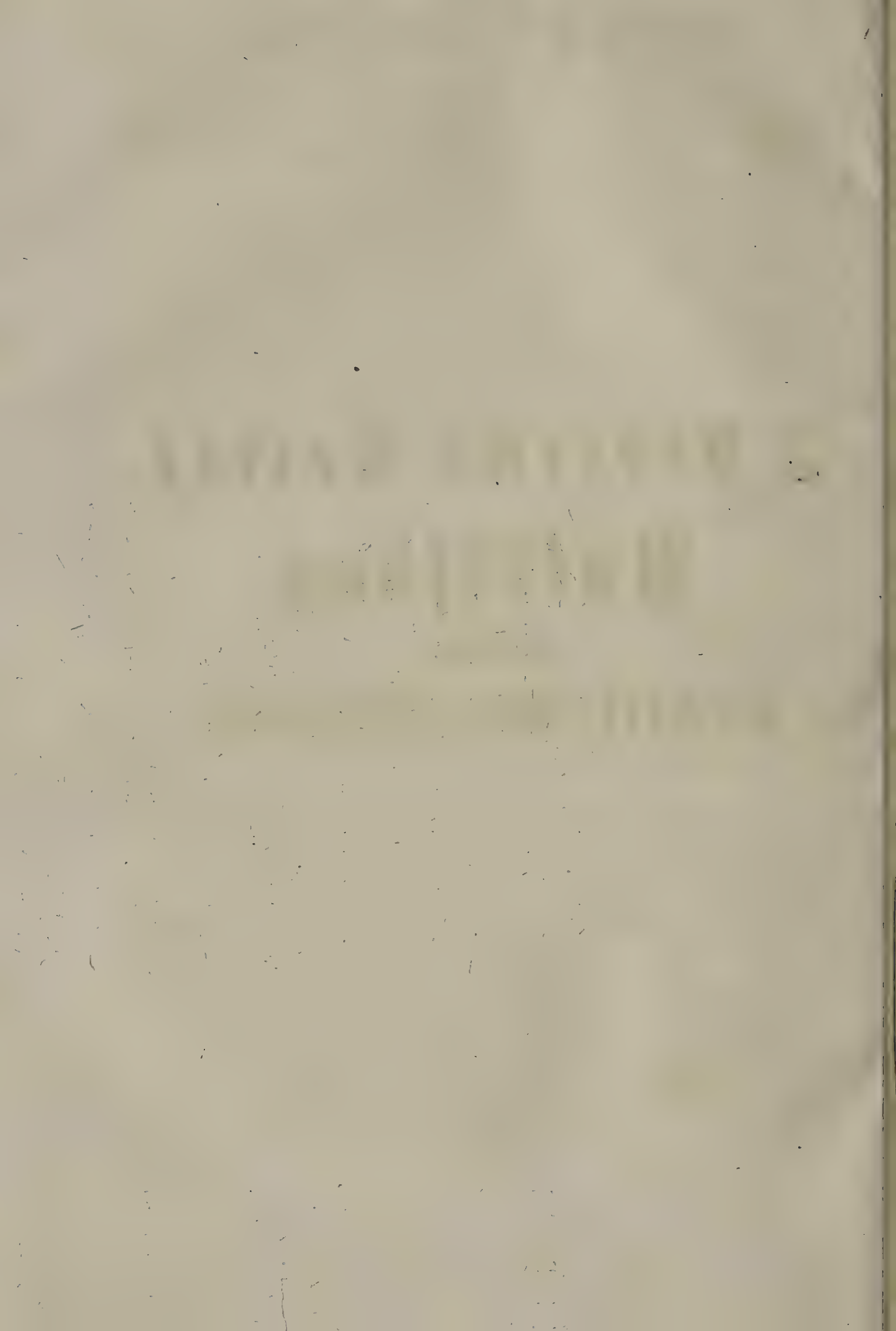






13.

J. Albrecht Eulers
Auflösung
einiger
geometrischen Aufgaben.





Erste Aufgabe.

Man soll zeigen, wie eine jede geradlinichte Figur durch Parallellinien in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zerschnitten werden kann?

1. Es sey ABCDEFG (1 Fig.) die vorgelegte Figur und MN diejenige Richtung, nach welcher dieselbe in n gleiche Theile zerschnitten werden soll. Man ziehe durch alle Ecken der Figur die graden Linien Bb; Gg; Cc; Dd; u. s. w. der gegebenen Richtung MN parallel, so wird hierdurch die ganze Figur theils in Dreyecke, theils in Vierecke zerschnitten werden: die Vierecke aber werden jederzeit zwey sich gleichlaufende Seiten haben.

2. Man berechne die Flächeninnhalte aller dieser Theilen, und setze den Innhalt des ersten Theils ABb, welcher allezeit so wie auch der letzte EFf ein Dreyeck ist, wenn die vorgelegte Richtung MN keiner Seiten der Figur parallel lauft — man setze

den Innhalt dieses ersten Theils ABb = 𝔄
den Innhalt des zweyten Theils BbGg = 𝔅
den Innhalt des dritten Theils CcFf = ℭ, u. s. w.

Endlich den Innhalt der ganzen Figur ABCDEFG = A
also daß A = 𝔄 + 𝔅 + ℭ + 𝔇 + &c. sey.

3. Man

3. Man merke sich folgende Hülfssätze —

I Lehrsatz. Es sey ABCD (2 Fig.) ein Viereck, dessen beyde Seiten AB und CP einander parallel laufen: BE sey seine Höhe oder eigentlicher die Entfernung der beyden Parallelseiten von einander; so wird der Flächeninnhalt des Vierecks

$$ABCD = \tfrac{1}{2} \times (AB + CD) \times BE \text{ seyn.}$$

Der Beweis dieses Satzes ist viel zu bekannt, als daß ich denselben hier beyzufügen nöthig hätte.

II Aufgabe. Es werden in dem ebengemeldten Viereck ABCD die beyden Parallelseiten AB, CD mit der Höhe BE gegeben, man soll durch dasselbe Viereck eine grade Linie XY der Seite AB oder CD parallel ziehen, also daß der von dem ganzen Viereck abgeschnittene Theil ABYX einer gegebenen Fläche gleich sey.

Die Auflösung dieser Aufgabe ist keiner Schwierigkeit unterworfen. Es sey $AB = b$; $DC = c$; $BE = a$

ferner $BP = x$: $XY = y$;

Man ziehe BQF der Seite AD parallel

so wird $QY = y - b$; $FC = c - b$

Und weil die beyden Dreyecke BQY und BFC einander ähnlich sind

$$BE : FC = BP : QY$$

das ist $a : c-b = x : y-b$

folglich $y - b = \frac{c-b}{a}x$ und $y = b + \frac{c-b}{a}x$

Nun setze man den Innhalt der gegebenen Fläche = B, und weil der Innhalt des abgeschnittenen Vierecks

$$ABYX = \frac{AB + XY}{2} \times BP \text{ ist,}$$

$$\text{so muß } \frac{AB + XY}{2} \times BP = B \text{ seyn.}$$

Folg-

Folglich $B = \frac{b+y}{2}x = \frac{b+b+\frac{c-b}{a}}{2}x$ und

$$2B = 2bx + \frac{c-b}{a}xx$$

Also $x = \frac{-ab + \sqrt{(aabb + 2aB(c-b))}}{c-b}$

und $y = b + \frac{c-b}{a} = \frac{\sqrt{(aabb + 2aB(c-b))}}{a}$

Es deutet aber der Buchstaben x die Perpendiculärlinie BP das ist die Entfernung der gesuchten Linie $XY = y$ von der einen Parallelseite $AB = b$ an.

III. **Erster Folgesatz.** Wenn die obere Parallelseite AB (3 Fig.) verschwindet, also daß das vorgelegte Viereck zum Dreyeck wird, davon das kleinere Dreyeck $ABYX = B$ abgeschnitten werden soll, so erhält man durch die eben gefundene Formuln, weil hier $b = o$ wird

die Höhe des verlangten Dreyecks $x = \frac{\sqrt{2acB}}{c}$ das ist $BP = \frac{\sqrt{2B \times BE}}{DC}$

und die Grundlinie desselben $y = \frac{\sqrt{2acB}}{a}$ das ist $YX = \sqrt{\frac{2B \times DC}{BE}}$.

IV. **Zweyter Folgesatz.** Verschwindet aber die untere Parallelseite DC (4 Fig.) so verwendet sich das vorgelegte Viereck in ein umgekehrtes Dreyeck. In diesem Fall muß $c = o$ gesetzt werden, und der abgeschnittene Theil ABPX wird der gegebenen Fläche B gleich seyn, wenn $x = \frac{+ab \sqrt{(aabb - 2abB)}}{b}$

und $y = \frac{\sqrt{(aabb - 2abB)}}{a}$ ist; das ist wenn

die Höhe BP $= + BE\sqrt{(BE^2 - \frac{2B \times BE}{AB})}$ und

$$XY = \sqrt{(AB^2 - \frac{2B \times AB}{BE})} \text{ gemacht wird.}$$

V. Dritter Folgesatz. Wann endlich die beyden Parallelseiten AB und CD (5 Fig.) einander gleich sind, und folglich das vorgelegte Viereck zum Parallelegrammum wird, so lassen sich hier, weil $b = c$ ist, die gefundenen Formuln nicht anwenden. Die vorhergehende Gleichung $2B = 2bx + \frac{c-b}{a}xx$ aber giebt uns sogleich zu erkennen, daß in diesem Fall $x = \frac{B}{b}$ und $y = b$; das ist, daß BP $= \frac{AD}{B}$ und XV $=$ AB seyn muß; welches ohnedem schon aus den ersten Anfangsgründen der Geometrie bekannt ist.

4. Durch Hülfe dieser Sätze läßt sich nunmehro gegenwärtige Aufgabe sogleich auflösen. Man darf nur alle in dem 1 §. erwehnte Theile $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, u. s. w. der vorgelegten Figur ABCDEFG (1 Fig.) mit dem 12 Theil des ganzen Innhalts derselben A vergleichen, und falls ein oder mehrere zusammen genommen kleiner als $\frac{A}{n}$ befunden werden, das noch fehlende von dem nächstfolgenden Theil abnehmen.

5. Einige Exempel sollen diese angezeigte Art die geradlinichten Figuren durch Parallellinien in eine verlangte Anzahl gleicher Theile zu zerschneiden noch näher erläutern.

Erstes Exempel.

Es wird ein reguläres Achteck gegeben, dessen Seite wir = 1 (7 Fig.) setzen wollen; man soll dasselbe durch gra-

de Linien in fünf gleiche Theile zerschneiden, und diese Linien sollen alle einer Seite des Achtecks, der *AH* z. Ex. parallel laufen.

Man ziehe durch alle Ecken des Achtecks B, C die graden Linien BG, CF der gegebenen Richtung AH parallel. Es wird aber in diesem Fall eine jede derselben zugleich durch zwey Ecken der Figur gehen, und das ganze Achteck wird dadurch nur in drey Vierecke zerschnitten werden, davon das mittelste ein rechtwinklichtes Parallelogrammum ist, die beyden äußern aber einander vollkommen gleich und ähnlich sind.

Man berechne darauf die Flächeninnhalte dieser Vierecke, und da

$AB = 1 : ABI = 45° : AI = BI = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707106 ; BG = AH + 2BG = 1 + \frac{2}{\sqrt{2}}$
oder $BG = 1 + \sqrt{2} = 2, 414212$ so wird der Flächeninnhalt
des Vierecks $AHBG = \mathfrak{A} = \frac{1}{2}(AH + BG) \times AI = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{2})\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = 1, 207106$
des Vierecks $BGFC = \mathfrak{B} = BG \times BC = (1+\sqrt{2}).1 = 1+\sqrt{2} = 2, 414212$
des Vierecks $CFED = \mathfrak{C} = AHBG$ = - - - - - $= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} = 1, 207106$
Und der Innhalt des ganzen Achtecks
$ABCDEFGH = A = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$ = - - - - - - $2 + 2\sqrt{2} = 4, 828425$.

Nun soll dieses Achteck in 5 gleiche Theile zerschnitten werden, folglich muß der Innhalt eines jeden Theils $\frac{A}{5} = \frac{2+2\sqrt{2}}{5} = 0, 965685$ seyn: da aber der Innhalt des ersten Vierecks AHBG $= 1, 207106$ schon größer ist als der fünfte Theil, so lasset uns nach der in dem 11 Satze gegebenen Formul einen Theil AHYX der diesem 0, 965685 gleich ist, abschneiden, und weil hier $b = AH = 1$; $c = BG = 1+\sqrt{2}$; $a = AI = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $c - b = \sqrt{2}$ und $B = AHYX \frac{2+2\sqrt{2}}{5}$ ist, so wird

 $x = AP$

$$x = AP = \frac{-1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\left(1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2+2\sqrt{2}}{5} \cdot \sqrt{2}\right)}}{\sqrt{2}}$$ oder

$$AP = -\tfrac{1}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{13}{20} + \tfrac{2}{5}\sqrt{2}\right)} = 0,602582$$

das ist ungefähr $AP = \frac{3}{5}$ seyn.

Da nun die Höhe des ersten Fünftels AHYX gefunden, $= \frac{2+2\sqrt{2}}{5} = 0,965685$ ist, so wird $XYGB = \mathfrak{A} - AHYX = \frac{1+\sqrt{2}}{10}$ $= 0,241421$ seyn, und weil dieses übrig-gebliebene Viereck XYGB kleiner ist als der fünfte Theil des ganzen Achtecks, so muß von dem folgenden Viereck $BGFC = \mathfrak{B} = 1+\sqrt{2} = 2,414212$ noch ein Stück BGVZ, das $= \frac{A}{5} - XYGB = \frac{3+3\sqrt{2}}{10} = 0,724264$ ist, abgeschnitten werden, damit nämlich XYGVZB das verlangte zweyte Fünftel ausmache.

Es ist aber BGFC ein rechtwinklichtes Parallelogrammum, folglich werden wir hier nach dem V Satz erhalten

$b = BG = CF = 1+\sqrt{2}$; $B = BGVZ = \frac{3+3\sqrt{2}}{10}$, und

$$x = BZ = \frac{3+3\sqrt{2}}{10(1+\sqrt{2})} = \frac{3}{10} \times \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{3}{10}.$$

Jetzt sollte man auf eine ähnliche Weise zu der Abschneidung des dritten Fünftels fortschreiten, da die vorgelegte Figur aber ein reguläres Achteck ist, so ist man dieser Mühe überhoben: man darf nur die zwey eben abgeschnittenen erste Fünftel auch grade gegenüber abschneiden, indem man von dem dritten Theil $DEFC = \mathfrak{C}$ anfängt, so wird man das letzte und das vierte Fünftel erhalten: das dritte Fünftel aber wird sich als das mittelste von selbsten geben.

Wann man demnach in einem jeglichen regulären Achteck ABCDEFGH (7 Fig.) die grade Linie AD ziehet und auf derselben $AP = \frac{3}{5}AH$ und $DQ = \frac{3}{5}AH$, oder genauer $AP = 0,602582\,AH$ und $DQ = 0,602582\,AH$, ferner auf der Seite BC; $BZ = \frac{3}{10}AH$ und $CW = \frac{3}{10}AH$; absticht.

Wann

Wenn man endlich durch diese Puncte P, Z, W, Q die graden Linien XY, ZV, WT, RS der Seite AH parallel ziehet, so werden dieselben das reguläre Achteck ABCDEFGH in fünf gleiche Theile zerschneiden. Es wird nämlich
AHYZ = YXBZVG = ZVTW = TWCRSF = RSED = $\frac{1}{5}$ ABCD-EFGH seyn.

Zweytes Exempel.

Es wird wiederum ein reguläres Achteck gegeben dessen Seite = 1 ist, man soll dasselbe gleichfalls durch Parallellinien in fünf gleiche Theile zerschneiden; (8 Fig.) die Richtung aber, nach welcher diese Linien streichen sollen, sey MN und der Winkel, den MN mit der Seite *AB* des Achtecks macht, sey MN*AB* = 12° 30′.

Man ziehe durch alle Ecken der Figur die graden Linien B*b*, H*h*, Cc, Gg, D*d*, F*f* der vorgelegten Richtung MN parallel, und auf diesen hinwiederum die Perpendiculärlinien AP, A*p*, *bq*, BQ, BR, *h*R, H*r*, Hr, gS, so bekömmt man, weil AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HA = 1. und
BAH = CBA = DCB = EDC = FED = GFE = HGF = AHG = 135°

AP = sin 12° 30′ - - - 0, 2164399; *l*AP - - - 9, 3353368.

B*b* = $\frac{\sin 135°}{\sin 32° 30′}$ - - - 1, 3160380; *l*B*b* - - - 0, 1192685.

A*p* = sin 32° 30′ - - - 0, 5372996;

bq = A*p* — AP - - - - - 0, 3208600; *lbq* - - - 9, 5063156.

*q*H = $\frac{bq}{\text{tang } 32° 30′}$ - - - 0, 5036491; *lq*H - - - 9, 7021283.

Q*h* = $\frac{bq}{\text{tang } 57° 30′}$ - - - 0, 2044104; *l*Q*h* - - - 9, 3105029.

H*h* = B*b* + *q*H + Q*h* - - - 2, 0240975; *l*H*h* - - - 0, 3062313.

BR = sin 57° 30′ - - - - 0, 8433914;

hR =	$B\mathfrak{R} - bq$	---- 0, 5225314;	lhR ---	9, 7181123.
CR =	$\frac{hR}{\text{tang } 57^\circ\ 30'}$	--- 0, 3328892;	lCR ---	9, 5222996.
cr =	$\frac{hR}{\text{tang } 77^\circ\ 30'}$	--- 0, 1158424;	lcr ---	9, 0638675.
Cc =	$Hh + CR + cr$	-- 2, 4728291;	lCc ---	0, 3931941.
Hr =	$\sin 77^\circ\ 30'$	--- 0, 9762960;	lHr ---	9, 9895815.
gS =	$Hr - hR$	---- 0, 4537646;	lgS ---	9, 6568306.
Gg =	Cc	--------- 2, 4728291;	lGg ---	0, 3931941.

Ferner der Flächeninnhalt des

△ ABb	= 𝔄	= $\frac{1}{2}$. $AP \times Bb$	------ 0, 1424214.	addirt
Trap. $BbHh$	= 𝔅	= $\frac{1}{2}$. $bq \times (BbHh)$	--- 0, 5358590.	
Trap. $HhCc$	= ℭ	= $\frac{1}{2}$. $hR \times (HhCc)$	--- 1, 1748925.	
Trap. $CcGg$	= 𝔇	= $gS \times Cc$	----- 1, 1220820.	
Trap. $GgDd$	= 𝔈	= Trap. $HhCc$	----- 1, 1748925.	
Trap. $DdFf$	= 𝔉	= Trap. $BbHh$	----- 0, 5358580.	
△ FfE	= 𝔊	= △ ABb	------- 0, 1424214.	

Folglich des ganzen Achtecks

ABCDEFGH = A = 𝔄+𝔅+ℭ+𝔇+𝔈+𝔉+𝔊... 4, 8284258

so wie derselbe schon in dem vorhergehenden Exempel gefunden worden ist.

Der Flächeninnhalt eines jeden Fünftels muß demnach $\frac{1}{5}$ A = 0, 965685 seyn. Da nun 𝔄 = 0, 142421 kleiner als $\frac{1}{5}$ A, und auch noch 𝔄+𝔅 = 0, 678279 kleiner ist als $\frac{1}{5}$A, so muß von dem folgenden dritten Stück ℭ ein Theil $HhXY$ hinzugethan werden, damit 𝔄 + 𝔅 + $HhXY$ = 0, 965685 werde:

Das abzuschneidende Stück $HhXY$ soll also hier = 0, 287406 seyn, und man wird für die in dem 11 Satze gegebene Formul erhalten.

$b = Hh$

$b = Hh = 2,024097$; $c = Cc = 2,472829$;
$a = hR = 0,522537$; $c - b = 0,348732$;
$B = HhXY = 0,287406$; Folglich

$$x = hx = Hy = \frac{-1,0576 + \sqrt{1,2233}}{0,3487}$$ das ist

$hx = Hy\ 0,1388$.

Man ziehe also durch die Puncte x und y die grade Linie XY, so wird XYHAB das erste Fünftel des Achtecks seyn.

Richtet man aber gegenüber aus den Puncten D und d die Perpendiculärlinien D𝔇 und d𝔡 auf und sticht auf denselben die gleiche Entfernungen D𝔵 $=$ d𝔶 $= 0,1388$ ab, so wird die durch diese Puncte 𝔵 und 𝔶 gezogene grade Linie 𝔛𝔜 das letzte Fünftel 𝔛𝔜FED abschneiden; beyde Linien XY und 𝔛𝔜 aber werden der gegebenen Richtung MN parallel laufen.

Um nun auch das zweyte Fünftel zu bekommen, so ziehe man das Viereck hHXY von dem ganzen Viereck $HhCc = \mathfrak{C}$ ab, und weil der Rest $YXCc = 0,887486$ kleiner ist als ein Fünftel des ganzen Achtecks, nämlich kleiner als $\frac{1}{5}A = 0,965685$ so muß das noch fehlende $0,078199$ von dem folgenden Viereck $CcGg = \mathfrak{D} = 1,122082$, welches ein Parallelogrammum ist, abgeschnitten werden.

Es sey CcWV dieses noch fehlende Stück oder $CcWV = 0,078199$: und wir werden in dem gegenwärtigen Fall durch Hülfe des V Satzes folgende Bestimmungen erhalten

$B = CcWV = 0,078199$: $b = c = Ce = Gg = 2,472829$

$$x = cw = \frac{B}{b} = \frac{78199}{2472829}$$ das ist $cw = 0,031623$.

Wenn man demnach durch diesen Punct w die Linie VW der gegebenen Richtung MN parallel ziehet, so wird XYWVC das zweyte verlangte Fünftel seyn.

Und

Und wann man auf eine ähnliche Art in dem gegenüberstehenden Puncte g eine Perpendiculärlinie gS aufrichtet, und auf derselben die Höhe $gw = cw = 0,031623$ absticht, so wird die durch diesen Punct w gezogene Parallellinie 𝔚𝔙 das vierte gesuchte Fünftel 𝔛𝔜𝔖𝔙𝔚 abschneiden.

Hat man aber das I, II, IV und V Fünfthel schon abgeschnitten, so bleibt in der Mitte nothwendig das III Fünftel übrig: dieses Fünftel wird also in der Figur das Parallelogrammum VW𝔙𝔚 seyn.

Drittes Exempel.

Man soll ein irreguläres Viereck $ABCD$ (10 Fig.) durch Parallellinien in vier gleiche Theile zerschneiden, und die Richtung MN, nach welcher diese Parallellinien streichen sollen, mache mit der Seite AB einen Winkel von 30 Graden. Es ist aber $AB = 100$; $AD = 200$; $BC = 400$; der Winkel $DAB = 150°$ und $ABC = 70°$.

Man ziehe Aa: Dd der gegebenen Richtung MN und $A\mathfrak{d}$ der Seiten BC parallel; ferner Bm, An, und Cp auf Aa und Dd perpendiculär; so werden die Winkel $BAa = 30°$; $aAD = 120°$; $DA\mathfrak{d} = 40°$; $ADd = 60°$; $BaA = 80°$; $Aad = 100°$; $adD = 80°$ und $DdC = 100°$ seyn; folglich

$Bm = AB. \sin BAa = 50$; $\quad lBm = 1,6989700$

$Aa = \frac{AB. \sin ABa}{\sin BaA} = 95,419$; $\quad lAa = 1,9796343$

$Ba = \frac{AB. \sin BAa}{\sin BaA} = 50,771$;

$An = AD. \sin ADd = 173,21$; $\quad lAn = 2,2385606$

$D\mathfrak{d} = \frac{AD. \sin DA\mathfrak{d}}{\sin A\mathfrak{d}D} = 130,54$; $\quad lD\mathfrak{d} = 2,1157460$

Ad

$Ad = \frac{AD.\ \sin ADd}{\sin AdD} = 175,\ 88;$

Dd	$= Aa + Dd$	$= 225,\ 96;$	$lDd = 2,\ 3540316$
dC	$= BC - Ba - Ad$	$= 173,\ 35;$	$ldC = 2,\ 2389238$
Cp	$= dC \sin pdC$	$= 170,\ 72;$	$lCp = 2,\ 2322753$

Der Flächeninnhalt des

$\triangle ABa$	$= \mathfrak{A} = \frac{1}{2}Aa \times Bm$ — — — —	$2385,\ 4$
Trap. $AaDd$	$= \mathfrak{B} = \frac{1}{2}(Aa + Dd) \times AN$ — —	$27832,\ 2$
$\triangle DdC$	$= \mathfrak{C} = \frac{1}{2}Dd \times Cp$ — — — —	$19287,\ 5$
$ABCD$	$= \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = A$ — — — —	$49505,\ 1$
der vierte Theil hiervon ist $\frac{A}{4}$	— — — —	$12376,\ 3.$

Nun ist $ABa = \mathfrak{A}$ kleiner als $\frac{A}{4}$ folglich muß das noch fehlende $\frac{A}{4} - \mathfrak{A} = 9990,\ 9$ von dem folgenden Theil $\mathfrak{B}$ abgeschnitten werden: man wird also nach dem 11 Satze bekommen

$B = Aa\mathfrak{X}x = 9990,\ 9;\ b = Aa = 95,\ 419;\ c = Dd = 225,96$

$a = An = 173,\ 21;\quad c - b = Dd = 130,\ 54$

$$x = Ax = \frac{-16527 + \sqrt{(724936529)}}{130,\ 54} = 79,\ 64.$$

Wann man demnach auf der Perpendiculärlinie An, eine Entfernung $Ax = 79,\ 64$ absticht und durch x eine grade Linie $X\mathfrak{X}$ der gegebenen Richtung $\mathfrak{MN}$ parallel ziehet, so wird $AB\mathfrak{X}X$ das erste verlangte Viertel seyn.

Da ferner der Rest $X\mathfrak{X}dD = \mathfrak{B} - Aa\mathfrak{X}X = 17841,\ 3$ annoch größer ist, als es einem Viertel des ganzen Vierecks zukömmt, so muß man das zweyte Viertel $X\mathfrak{X}\mathfrak{Y}Y$ von diesem Reste abschneiden; oder welches auf eins hinaus läuft, man muß von dem ganzen Theil $AadD = \mathfrak{B}$ das Viereck $Aa\mathfrak{Y}Y = Aa\mathfrak{X}x$

$+\frac{A}{4} = 22367, 2$ abschneiden; folglich wird hier wiederum nach dem 2 Satze $b = Aa = 95, 419$; $c = Dd = 225, 96$; $c-b = $ Dd $= 130, 54$; $a = An = 173, 21$; B aber $=$ AaYY $= 22367, 2$ seyn, und also

$$x = Ay = \frac{-16527 + \sqrt{1284598429}}{130, 54} = 147, 95$$

Man mache derowegen $Ay = 147, 95$ und ziehe durch dieses Punct y die grade Linie YY der gegebenen Richtung MN parallel, so wird XXYY das zweyte verlangte Viertel seyn.

Da nun YYdD $=$ AadD $-$ AaYX $= 5465$ kleiner als $\frac{A}{4} = 12376, 3$ ist, so muß noch von dem folgenden Stück DdC $=$ C, ein gewisser Theil DdZZ $= 6911, 3$ hinzugethan werden, damit nämlich YYZZD das dritte Viertel gebe.

Hier werden wir, weil DdC $=$ C ein umgekehrtes Dreyeck ist, nach dem IV Satze erhalten

$a = Cp = 170, 72$; $b = Dd = 225, 96$; B $=$ DdZZ $= 6911, 3$;

$$x = px = \frac{38575 - \sqrt{954822625}}{225, 96} = 33, 96$$

Wenn man demnach $px = 33, 96$ oder $Cx = 136, 76$ nimmt und durch das Punct x, die Linie ZZ der gegebenen Richtung MN parallel ziehet, so wird YYZZD das dritte verlangte Viertel, und folglich das Dreyeck ZZC das letzte Viertel seyn. Es wird nämlich

ABXX $=$ XXYY $=$ YYZZD $=$ ZZC $= \frac{1}{4}$ABCD seyn.

Anhang.

6. Wollte man sich eines Proportionalzirkels bedienen und eine vorgelegte gradlinichte Figur durch eine Verzeichniß in eine

eine gegebene Anzahl gleicher Theile zerschneiden, so will ich noch kürzlich folgender Art erwähnen, welche zu der gegenwärtigen Absicht weit bequemer seyn wird.

7. Die Hauptsache, wie ich schon angemerket habe, kömmt auf die Auflösung des zweyten Satzes an, und diesen werde ich anjetzo durch eine geometrische Verzeichniß besonders aufzulösen mich bemühen.

8. Es sey ABCD (9 Fig.) ein Viereck, dessen zwey Seiten AB und DC einander parallel laufen. Man verlängere die beyden anderen Seiten AD und BC bis dieselben in O zusammen stossen, und von diesem Punct O lasse man eine Perpendiculärlinie OE auf AB herunter. Nun sey ABXY der gesuchte abgeschnittene Theil, dessen Flächeninnhalt von einer vorgeschriebenen Größe seyn soll; die grade Linie XY muß also der Seite AB parallel laufen, und da die vorgeschriebene Größe allemal in ein Quadrat verwandelt werden kann, die Gestalt derselben mag beschaffen seyn wie man auch immer will, so lasset uns setzen, die grade Linie MN wäre die Seite dieses Quadrats.

9. Weil die Dreyecke AOB und XOY einander ähnlich sind, so verhalten sie sich wie die Quadrate ihrer ähnlichen Seiten oder Linien; das ist $\triangle AOB : \triangle XOY = AO^2 : XO^2$

oder $\triangle AOB : ABYX + \triangle AOB = AO^2 : XO^2$

Es sey o die Mitte der Höhe OE oder $Eo = \frac{1}{2}EO$, so wird der Innhalt des Dreyecks $AOB = AB \times Eo$ seyn, und weil der Innhalt von $ABYX = MN \times MN$ seyn soll, so erhält man

$$AB \times Eo : MN \times MN + AB \times Eo = AO^2 : XO^2$$

folglich $\sqrt{AB \times Eo} : \sqrt{(MN \times MN + AB \times Eo)} = AO : XO.$

10. Nun deutet $\sqrt{AB \times Eo}$ die mittlere Proportionallinie zwischen AB und Eo, das ist, zwischen der Grundlinie und der

halben Höhe des Dreyecks AOB an, und man kann dieselbe leicht vermittelst des Proportionalzirkels finden: Es sey also $ab = \sqrt{AB \times Eo}$, so wird

$$ab : \sqrt{(MN \times MN + ab \times ab)} = AO : OX.$$

Ferner da $\sqrt{(MN \times MN + ab \times ab)}$ die Hypothenuse eines rechtwinklichten Dreyecks andeutet, dessen beyde Catheti MN und ab sind, und diese Hypothenuse bc durch die wirkliche Verzeichniß des rechtwinklichten Dreyecks abN leicht gefunden wird, so werden wir erhalten

$$ab : bc = AO : OX.$$

Das ist die Linie OX wird die vierte Proportionallinie zwischen den beyden gefundenen Linien ab, bc und der Seite AO des Dreyecks AOB andeuten; da nun diese OX vermittelst eines Proportionalzirkels gefunden wird, so wird, wenn wir dieselbe wirklich auf der Seite OD von O nach D auftragen, und durch das Punct X die Linie XY der Seite AB oder DC parallel ziehen, diese Linie den verlangten Theil ABYX = MN × MN abschneiden.

Anmerkung.

11. Wollte man auf die eben angezeigte Art die Weite XO durch die Rechnung bestimmen, so würde man auf eine ähnliche Wurzelformul gerathen, wie wir durch die vorige Auflösung erhalten haben.

Erster Zusatz.

12. Wann von einem Dreyeck ADC (3 Fig.) ein Stück AXY von einer gegebenen Größe MN × MN abgeschnitten werden soll, also daß die abschneidende Linie XY der Grundlinie DC parallel laufe, so kann man es am leichtesten auf folgende Art angreifen.

I. Man lasse aus der Spitze A auf der Grundlinie DC die Perpendicularlinie AE herunter

II. Man suche die mittlere Proportionallinie *ab* zwischen dieser halben Höhe $\frac{1}{2}$AE und der Grundlinie DC.

III. Nehme man die vierte Proportionallinie *cd* zwischen der eben gefundenen *ab*, der Seite MN des gegebenen Quadrats, und der einen Seiten AD des vorgelegten Dreyecks ADC.

IV. Trage man diese Linie AX = *cd* auf der Seite AD von A nach D hin: endlich

V. Ziehe man durch X die Linie XY der Grundlinie DC parallel; so wird AXY der verlangte Theil nämlich AXY = MN × MN seyn.

Zweyter Zusatz.

13. Wann von einem umgekehrten Dreyeck ACB (4 Fig.) ein Stück AXYB von einer gegebenen Größe MN × MN abgeschnitten werden soll, so darf man nur auf der im vorigen Zusatze erwehnten Art den Ueberschuß des Innhalts des ganzen Dreyecks über das gegebene Quadrat MN × MN, nämlich CXY = ABC — MN × MN, von der Spitze C an abschneiden.

Dritter Zusatz.

14. Wann von einem Parallelogrammum ABCD (5 Fig.) ein Stück ABXY von einer gegebenen Größe MN × MN abgeschnitten werden soll, so ziehe man die Perpendiculärlinie BE und steche auf derselben die dritte Proportionallinie BP zu der Seite AB und der Seite MN des gegebenen Quadrats MN × MN ab

AB : MN = MN : BP

und die durch diesen Punct P gezogene Parallellinie XY wird das verlangte Stück ABYX abschneiden.

Anmerkung.

15. Wenn die obere Seite AB (9 Fig.) des Vierecks ABCD größer ist, als die untere Parallelseite DC, so wird das Punct O unter der Seite DC fallen. Um aber in diesem Fall von dem Viereck ABCD ein Stück ABYX von einer gegebenen Größe $MN \times MN$ abzuschneiden, so richte man

1. Aus dem Puncte O auf der obern Parallelseite AB die Perpendicularlinie OE auf, und theile dieselbe in o in zwey gleiche Theile.
2. Suche man die mittlere Proportionallinie ab zwischen AB und Oo oder $Eo = \frac{1}{2}EO$; $AB : ab = ab : Oo$.
3. Suche man den andern Cathetum bc eines rechtwinklichten Dreyecks Mbc, davon der eine Cathetus $Mb = MN$ die Hypothenuse Mb aber $= ab$ ist:
   $$bc = \sqrt{(AB \times Oo - MN \times MN)}.$$
4. Suche man die vierte Proportionallinie cd zu ab, bc und OA
   $$ab : bc = OA : cd.$$
5. Nehme man auf der Seite OA, $OX = cd$: Endlich
6. Ziehe man durch dieses Punct X die Linie XY der Seite AB parallel; so wird
7. Das Stück ABYX der verlangte Theil des ganzen Vierecks ABCD seyn: $ABYX = MN \times MN$.

Zweyte Aufgabe.

Eine Zirkelfläche durch Parallellinien in eine gegebene Anzahl gleicher Theile zu zerschneiden.

1. Es sey AMM^1BN^1NA eine Zirkelfläche, welche durch Parallellinien MN, mn, (1 Fig.) u. s. w. in n gleiche Theile zerschnit-

schnitten werden soll; die Richtung dieser Parallellinien MN aber mag beschaffen seyn wie man auch nur immer will, so wird die Auflösung gegenwärtiger Aufgabe keiner Abänderung unterworfen seyn; aus einer ähnlichen Ursache wird es uns auch erlaubt seyn den halben Durchmesser der vorgelegten Zirkelfläche = 1 anzunehmen; weil nämlich alle Zirkel einander vollkommen ähnlich und die Krümmung eines jeden Zirkels an allen Orten gleich groß ist.

2. Es stelle MANM den ersten Theil der Zirkelfläche vor, oder MANM sey $= \frac{1}{n}$ AMBNA; der Bogen MAN aber, oder der Winkel MCN der diesen ersten Theil einfaßt begreife m Grade: MCN $= m$. Da nun der halbe Durchmesser unsers Zirkels = 1 ist, so wird der halbe Umkreis desselben seyn = 3, 1415926, folglich der Innhalt der ganzen Zirkelfläche = 3, 1415926 Flächenmaas und der n Theil derselben MANM $= \frac{3,1415926}{n}$.

3. Nun ist der Innhalt des Ausschnitts AMCNA $= \frac{m}{360} \times 3,1415926$. Und, wenn aus dem Puncte M auf dem halben Durchmesser NC die Perpendiculärlinie MP = $\sin m$ gezogen wird. Der Innhalt des Dreyecks NMC $= \frac{1}{2}$MP. NC $= \frac{1}{2} \sin m$ folglich wird der Innhalt des Abschnitts MANM seyn

$$\text{AMCNA} - \triangle\text{NMC} = \frac{m}{360} \times 3,1415926 - \frac{1}{2} \sin m.$$

Da nun dieser Innhalt gleich dem 12 Theil der ganzen Zirkelfläche 3, 1415926 seyn soll, so erhält man diese Gleichung

$$\frac{3,1415 \text{ \&c.}}{360} m - \frac{1}{2} \sin m = \frac{3,1415 \text{ \&c.}}{n}$$

welche durch $\frac{3,1415 \text{ \&c.}}{360}$ getheilt giebt

$$m - \frac{180}{3,1415 \text{ \&c.}} \sin m = \frac{360}{n} \text{ oder}$$

$$m - 57,295 \text{ \&c.} \times \sin m = \frac{360}{n}.$$

Es ist aber der Logarithme von 57, 295 &c. = 1, 7581226.

4. Diese gefundene Gleichung läßt sich durch keinen andern Weg, als durch die Annäherung auflösen: hat man aber den Werth von m daraus berechnet, so ist der diesem Winkel oder Bogen m zukommender Abschnitt MANM der erste verlangte 12 Theil der ganzen Zirkelfläche.

5. Um aber den zweyten, dritten, vierten, u. s. w. 12 Theil der ganzen Zirkelfläche zu bestimmen, so setze man in der eben herausgebrachten Gleichung $\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{3}n$, $\frac{1}{4}n$, u. s. w. für n; und die correspondirende Werthe von m werden diejenige Bogen seyn, deren Sehnen die ganze Zirkelfläche in 12 gleiche Theile zerschneiden.

Dann wenn das Stück MmaN der zweyte 12 Theil der Zirkelfläche ist, so muß der ganze Abschnitt $mnAm$ zweyen 12 Theilen gleich seyn: folglich wenn in der gefundenen Gleichung $\frac{1}{2}$ 12 für n geschrieben wird, so wird m den Bogen mAn andeuten.

6. Hiernächst muß ich bemerken, daß man bey der Theilung der Zirkelflächen nur bis auf die Hälfte zu gehen nöthig hat; weil die schon gefundenen ersteren Theile auch zugleich die letzteren Theile geben, wenn man dieselben grade gegenüber auf der Seite B des Zirkels absticht; so wird, wenn $M^1BN^1 = MAN$, $mBn^1 = mAn$, und s. w. gemacht wird, der Abschnitt $M^1N^1BM^1$ der letzte 12 Theil, $m^1M^1N^1n^1$ der letzt ohneine 12 Theil, u. s. w. der ganzen Zirkelfläche seyn.

Exempel.

7. Man soll eine Zirkelfläche durch Parallellinien in sechs gleiche Theile zerschneiden.

Da

Da hier $n = 6$ ist, so erhält man folgende Gleichung

$$m - 57,295 \text{ \&c. } \sin m = 60$$

und die ganze Sache läuft da hinaus, daß wir aus dieser Gleichung den Werth des Bogens m durch die Annäherung berechnen. Ich merke aber sogleich an, daß dieser Werth von m größer sey als 90 Grade, weil sonsten $m - 57,295$ &c. $\sin m$ allemal kleiner wäre als 60.

Lasset uns also folgende Sätze annehmen und berechnen

	I.	II.	III.	IV.
m - - - - - - - - - -	100	110	112	113
l 57, 295 &c. - - - -	1,7581226	1,7581226	1,7581226	1,7581226
$l \sin m$ - - - - - - -	9,9933515	9,9729858	9,9671659	9,9640261
l 57, 295 &c. sin m -	1,7514741	1,7311084	1,7252885	1,7221487
57, 295 &c. sin m -	56, 425	53, 840	53, 123	52, 741
m—57, 295 &c. sin$m$.	43, 575	56, 160	58, 877	60, 259
	fehlt noch 16, 425	fehlt noch 3, 840	fehlt noch 1, 123	ist zu groß um 0, 259

Hieraus folgt, daß der Winkel m zwischen den 112 und 113 Grad enthalten sey, und da wir hier nur von einem Grad zu dem folgenden gegangen, so läßt sich der wahre Werth von m ganz leicht und ziemlich genau vermöge einer gemeinen Regeldetrie bestimmen, dann man darf nur sprechen $1,123 + 0,259$ das ist $1,482$ Unterschied in der Formul $m - 57,295$ &c. $\sin m$ geben $1°$ oder $60'$ Zuwachs in dem Winkel m, um wie viele Minuten muß man diesen Winkel m über $112°$ vermehren, damit der Unterschied in der Formul genau 1, 123 werde: das ist

1, 480 geben $60'$ was geben 1, 123? Antwort. $46'$

Es ist also ziemlich genau $m = 112° \ 46'$.

Wollte man aber diesen Winkel noch genauer bestimmen, so berechne man zwey neue Satzungen auf die eben erwähnte Art, welche aber nur um etliche Minuten von einander unterschie-

den sind, und berechne aus den Fehlern, welche daraus in der Formul m — 57, 295 &c. sin m entspringen, den Unterschied zwischen dem wahren Winkel m und dem vorausgesetzten

Satzungen	V.	VI.
m	112° 45′	112° 50′
l 57, 295 &c.	1,7581226	1,7581226
l sin m	9,9648256	9,9645692
l 57, 295 &c. sin m	1,7229482	1,7226828
57, 295 &c. sin m	52, 838	52, 806
m — 57, 295 &c. sin m	59, 912	60, 060
	fehlt noch 0, 088	ist zu groß um 0, 060

Folglich da 0, 088 + 0, 060 oder 0, 148 geben 5′ oder 300″, so werden 0, 088 geben $\frac{300 \times 0,088}{0,148}$ das ist 178″; also ist $m = 112°$ 45′ + 178″ oder m = 112° 47′ 58″ sehr genau.

Um anjetzo den zweyten sechsten Theil zu berechnen, so setze man in der gefundenen allgemeinen Gleichung $\frac{1}{n} = \frac{2}{6}$ oder $n = 3$, und die daraus erstandene Gleichung

$$m - 57,295 \text{ \&c. } \sin m = 120$$

wird uns denjenigen Winkel m geben, welcher die beyden ersten sechsten Theile zusammen einfaßt.

Man setze	I.	II.	III.	IV.
m	150°	149°	149° 15′	149° 20′.
l 57, 295 &c.	1,7581226	1,7581226	1,7581226	1,7581226
l sin m	9,6989700	9,7118393	9,7086699	9,7076064
l 57, 295 &c. sin m	1,4570926	1,4699619	1,4667925	1,4657290
57, 295 &c. sin m	28, 648	29, 510	29, 295	29, 223
m — 57, 295 &c. sin m	121, 352	119, 490	119, 955	120, 110
	ist zu groß um 1, 352	ist zu klein um 0, 510	ist zu klein um 0, 045	ist zu groß um 0, 110

Folglich

Folglich	Also
$1,352+0,510:1° = 0,510:$*	$0,045+0,110:5' = 0,045:$*
$1,862:60' = 0,510:16'$	$0,155:300'' = 0,045:87''$
also	folglich
$m = 149° 16'$	$m = 149° 16' 27''$
ziemlich genau	sehr genau

Setzen wir nun um den dritten Theil zu finden $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}$ oder $n = 2$, also daß $m - 57,295$ &c. $\sin m = 180$ werde, so erhellet sogleich, daß hier $m = 180°$ seyn müsse, weil alsdann $\sin m = 0$ und der ganzen Gleichung ein völliges Genügen geleistet wird.

Der erste zweyte und dritte sechste Theil aber geben auch zugleich den letzten, fünften und vierten Theil.

Um also die Zirkelfläche ABA′D (2 Fig.) durch Parallellinien nach der Richtung MN in sechs gleiche Theile zu zerschneiden, so ziehe man den Durchmesser AA′ auf der gegebenen Richtung MN perpendiculär. Man nehme alsdann $AM = AN = \frac{112° 47' 58''}{2} = 56° 23' 59''$ ingleichen $A'M' = A'N' = 56° 23' 59''$ und ziehe die Sehnen MN und M′N′, so wird MANM der erste Theil, und M′A′N′M′ der letzte Theil seyn. Ferner mache man $Am = An = \frac{149° 16' 27''}{2} = 74° 38' 13\frac{1}{2}''$ ingleichen $A'm' = A'n' = 74° 38' 13\frac{1}{2}''$ und ziehe die Sehnen mn, $m'n'$, so wird $MNnm$ der zweyte Theil, und $M'N'n'm'$ der fünfte Theil seyn. Endlich ziehe man den Durchmesser DB auf AA perpendiculär, so wird mnBD der dritte Theil, $m'n'$BD der vierte Theil der nunmehro in sechs gleiche Theile zerschnittenen Zirkelfläche seyn.

Dritte Aufgabe.

Die Höhe und Grundlinie einer aufrechtstehenden geschlossenen Parabelfläche ist gegeben, man soll dieselbe durch Parallellinien in n gleiche Theile zerschneiden.

1. Es sey CADC (1, 2, 3, 4 und 5 Fig.) die vorgelegte Parabel, AB $= a$ die Höhe und CB $=$ BD $= b$ die halbe Grundlinie, so wird $\frac{4ab}{3}$ der Flächeninnhalt der ganzen Parabel CADC und $\frac{4ab}{3n}$ der Flächeninnhalt eines jeden verlangten Theils seyn.

2. Da die Auflösung gegenwärtiger Aufgabe von der Lage der vorgelegten Richtung in Ansehung der Axe der Parabel wesentlich abhängt, so muß auch dieselbe für eine jede Lage besonders eingerichtet werden. Ich werde hier nur drey Fälle entwickeln, welche aber dennoch so beschaffen sind, daß sie auch zugleich alle übrige in sich begreifen.

Erster Fall.

Wenn die Richtung MN (1 Fig.) nach welcher die Parabel durch Parallellinien in n gleiche Theile zerschnitten werden soll, auf der Axe AB der Parabel perpendiculär ist, und folglich der Grundlinie CD parallel läuft.

3. Es sey AMMA $= \frac{4ab}{3n}$ der erste gesuchte n Theil der ganzen Parabel und AP $= x$ die derselben zugehörige Abscisse, so wird PM $= \sqrt{\frac{bbx}{a}}$; MM $= 2\sqrt{\frac{bbx}{a}}$ und der Flächeninnhalt des Stücks AMMA $= \frac{4}{3}x\sqrt{\frac{bbx}{a}}$. Folglich $\frac{4}{3}x\sqrt{\frac{bbx}{a}} = \frac{4ab}{3n}$, und also x, das ist AP $= \frac{a}{\sqrt[3]{nn}}$ oder AP $= \frac{\text{AB}}{\sqrt[3]{nn}} = \text{AB}\sqrt[3]{(\frac{1}{n})^2}$. Es sey ferner MM'M'M $= \frac{4ab}{3n}$ der zweyte gesuchte n Theil der ganzen Parabelfläche, und weil dann AM'M'A $= \frac{8ab}{3n} = \frac{4ab}{3 \times \frac{1}{2}n}$ seyn muß, so werden wir auf

eine

eine ähnliche Art für diesen 2 Theil MM'M'M erhalten die Abscisse $AP' = AB\sqrt[3]{(\frac{2}{n})^2}$ folglich die Höhe dieses Theils $PP' = AB \sqrt[3]{(\frac{1}{n})^2} \times (\sqrt[3]{2^2} - 1)$. Eben so werden wir auch für den dritten Theil M' M'' M'' M' die Abscisse AP'' finden, wenn wir in dem für AP gefundenen Werth $\frac{1}{3} n$ anstatt n schreiben: es wird nämlich für diesen dritten Theil seyn die Abscisse $AP'' = AB \sqrt[3]{(\frac{3}{n})^2}$ und folglich die Höhe desselben $P' P'' = AB \sqrt[3]{(\frac{1}{n})^2} \times (\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{2^2})$.

Wenn man demnach von der Spitze A an auf der Axe der Parabel die Entfernungen

$$AP = AB \sqrt[3]{(\tfrac{1}{n})^2}$$
$$PP' = (\sqrt[3]{2^2} - 1)\ AB \sqrt[3]{(\tfrac{1}{n})^2}$$
$$P' P'' = (\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{2^2})\ AB\sqrt[3]{(\tfrac{1}{n})^2}$$
$$P'' P''' = (\sqrt[3]{4^2} - \sqrt[3]{3^2}) AB\sqrt[3]{(\tfrac{1}{n})^2}$$

und so weiter absticht, und durch diese Puncte P, P', P'', P''', u. s. w. die graden Linien MM, M'M', M'' M'', M''' M''', und s. w. der Richtung MN, das ist in dem gegenwärtigen Fall, der Grundlinie CD parallel ziehet, so werden dieselben die ganze Parabelfläche in n gleiche Theile zerschneiden.

Anmerkung. Da hier der Buchstabe b, so die halbe Grundlinie andeutet, gänzlich aus der Rechnung gegangen, so folgt hieraus, daß die Linien MM, M'M', M'' M'', M''' M''', u. s. w. nicht nur die vorgelegte Parabel ACDA, sondern überhaupt alle Parabeln von der gleichen Höhe AB in n gleiche Theile zerschneiden, die Grundlinien derselben mögen groß oder klein seyn.

Zweyter Fall.

Wenn die Richtung MN, nach welcher die Parabel in n gleiche Theile zerschnitten werden soll, der Axe AB der Parabel parallel läuft.

4. Es sey MND (2 Fig.) der erste Theil, und also MND $= \frac{4}{3}.\frac{ab}{n}$; Man setze für denselben die Entfernung von der Axe BN $= y$, so wird auch PM $= y$ und die Abscisse AP $= \frac{ayy}{bb}$ seyn; folglich

der Innhalt APMA $= \frac{2ay^3}{3bb}$; ABDA $= \frac{2}{3}ab$

der Innhalt PMDB $=$ ABDA—APMA $= \frac{2}{3}ab - \frac{2}{3}\frac{ay^3}{bb} = \frac{2a}{3bb}(b^3 - y^3)$

der Innhalt PMNB $= (a - \frac{ayy}{bb})\, y = ay.\frac{bb-yy}{bb}$

der Innhalt MND $=$ PMDB—PMNB $= \frac{2}{3}a.\frac{b^3-y^3}{bb} - ay.\frac{bb-yy}{bb}$

oder

der Innhalt MND $= \frac{a}{bb}(\frac{1}{3}y^3 - bby + \frac{2}{3}b^3)$

Da nun der Innhalt von MND $= \frac{4}{3}.\frac{ab}{n}$ seyn muß, so erhalten wir diese Gleichheit $\frac{a}{bb}(\frac{1}{3}y^3 - bby + \frac{2}{3}b^3) = \frac{4}{3}.\frac{ab}{n}$ oder

diese —— $y^3 - 3bby = \frac{-2b^3(n-2)}{n}$

welche allemal drey mögliche Wurzeln hat, und nach des Cardani Regel aufgelößt folgenden Werth für $y =$ BN giebet

$$y = \sqrt[3]{(-b^3(-1\tfrac{2}{n}) + \sqrt{(b^6(-1\tfrac{2}{n})^2 - b^6)})} + \sqrt[3]{(-b^3(1-\tfrac{2}{n}) - \sqrt{(b^6(1-\tfrac{2}{n})^2 - b^6)})}$$

oder $y = b \times (\sqrt[3]{(-1+\frac{2}{n}+2\sqrt{\frac{1}{n}}(\frac{1}{n}-1))} + \sqrt[3]{(-1+\frac{2}{n}-2\sqrt{\frac{1}{n}}(\frac{1}{n}-1))})$

das ist BN$=$BD$\times(\sqrt[3]{-1+\frac{2}{n}+2\sqrt{\frac{1}{n}}(\frac{1}{n}-1)})+\sqrt[3]{(-1+\frac{2}{n}-2\sqrt{\frac{1}{n}}(\frac{1}{n}-1))})$.

Erste

Erste Anmerkung. Dieser gefundene Werth von BN erhält allemal die Gestalt einer unmöglichen Größe, weil nämlich $\frac{1}{n}<1$ und folglich $\sqrt{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)}=\sqrt{\frac{1}{n}(1-\frac{1}{n})}\times\sqrt{-1}$; wenn man aber die beyden cubischen Wurzel-Formeln in unendliche Reyhen entwickelt, so heben sich die imaginären Glieder gegen einander auf, und der Werth von BN wird möglich.

Zweyte Anmerkung. Will man aber, um alle Weitläuftigkeit zu vermeiden, die Gleichung $y^3-3bby=-2b^3(1-\frac{2}{n})$ durch die Trisectionem anguli auflösen; so suche man erstlich einen Winkel Z dessen Cosinus $=-1+\frac{2}{n}$ ist, und die drey Wurzeln der vorgefundenen Gleichung werden alsdann alle unter dieser Formul begriffen seyn

$$y = 2b\cos(m\times 120+\tfrac{1}{3}Z)$$

Wo für m eine ganze Zahl nach Belieben angenommen werden kann. Also daß auch $m=0$ eine Wurzel der Gleichung, nämlich

$$y = 2b\cos\tfrac{1}{3}Z;\ \text{weil}\ \cos-\tfrac{1}{3}Z = \cos+\tfrac{1}{3}Z)$$

giebt.

Von den drey gefundenen Werthen für y aber muß nur derjenige erwählet werden, welcher kleiner als $\frac{1}{2}$CD ist. Es werden aber allemal zwey Werthe größer als $\frac{1}{2}$CD seyn, und zu den beyden niedersteigenden Aesten der Parabel unter der Grundlinie gehören.

Dritte Anmerkung. Hätte man anstatt der Entfernung BN die Abscisse AP gesucht, so würde man auf folgende cubische Gleichung gerathen seyn

$$AP^3-6.AB.AP^2+9.AB^2.AP=4AB^3(1-\tfrac{2}{n})^2$$

welche ebenfalls drey mögliche Wurzeln hat, und welche folglich auch am bequemsten durch die Trisectionem angulorum aufgelößt werden kann.

Vierte

Vierte Anmerkung. Da wir die Entfernung BN gesucht haben, so fiel die Höhe der Parabel AB aus der Rechnung, und als die Abscisse AP gesucht worden, so fiel die Grundlinie CD weg. Folglich werden einerley Parallellinien MN in dem ersten Fall alle Parabeln, die verschiedene Höhen aber eine und eben dieselbe Grundlinie CD haben, und in dem andern Fall alle Parabeln, die verschiedene Grundlinien aber eine und eben dieselbe Höhe AB haben, in n gleiche Theile zerschneiden.

Fünfte Anmerkung. Ich habe zwar hier nur gezeiget, wie der Ort N der ersten Parallellinie MN, welche nämlich den ersten n Theil MND abschneidet, bestimmt werden soll. Die Oerter N′, N″, N‴, und s. w. der übrigen Parallellinien M′N′, M″N″, M‴N‴, und s. w. aber werden aus eben derselben Gleichung

$$BN^3 - 3\,BD^2 \times BN = 2BD^3 \times (1 - \tfrac{2}{n})$$

oder $AP^3 - 6\,AB \times AP^2 + 9\,AB^2 \times AP = 4AB^3\,(1 - \tfrac{2}{n})^2$

berechnet, wenn man für n nacheinander $\tfrac{1}{2}n$, $\tfrac{1}{3}n$, $\tfrac{1}{4}n$, und s. w. oder für $\tfrac{1}{n}$ nacheinander $\tfrac{2}{n}$, $\tfrac{3}{n}$, $\tfrac{4}{n}$, u. s. w. schreibt.

Dritter und letzter Fall.

Wenn die Richtung MN, (3 Fig.) nach welcher die Parabel in n gleiche Theile zerschnitten werden soll, mit der Grundlinie CD einen gegebenen Winkel MNC = a macht.

5. Es sey MENM der erste gesuchte Theil, also daß MN der gegebenen Richtung MN parallel laufe und MENM $= \frac{4ab}{3n}$ sey. Man setze den Tangenten des Winkels MNC $= m$ oder tang a $= m$, so wird auch tang QNM $= m$ seyn. Es sey ferner PM $= x$, und QN $= y$, so wird AP $= \frac{axx}{bb}$ und AQ $= \frac{ayy}{bb}$ seyn;

folg-

folglich $PQ = \frac{a}{bb}(yy - xx) = \frac{a}{bb}(y+x)(y-x)$. Nun aber ist $PQ = MO = ON$ tang. $MNO = (QN - PM)$ tang. MNO das ist $PQ = (y-x)m$; folglich muß $\frac{a}{bb}(y+x)(y-x) = (y-x)m$ das ist $\frac{a}{bb}(y+x) = m$ seyn, durch welche Gleichung sogleich y durch x bestimmt wird; es ist nämlich $y = \frac{mbb}{a} - x$, folglich $AQ = \frac{a}{bb}(\frac{mbb}{a} - x)^2$; $PQ = \frac{a}{bb}(\frac{mbb}{a} - x)^2 - \frac{a}{bb}x^2 = \frac{mmbb}{a} - 2mx$ $QN = y = \frac{mbb}{a} - x$ und der Flächeninnhalt von

$$AQNA = \tfrac{2}{3} AQ.\,QN = \tfrac{2}{3} \times \frac{a}{bb}(\frac{mbb}{a} - x)^3$$

$$APMA = \tfrac{2}{3} AP.\,PM = \tfrac{2}{3} \times \frac{a}{bb} x^3$$

$$PMNQ = \tfrac{1}{2} PQ\,(PM + QN) = \frac{mmbb}{2a}(\frac{mbb}{a} - 2x)$$

Da nun $MENM = \frac{4ab}{3n} = AQNA - APMA - PMNQ$ ist, so erhalten wir folgende Gleichung

$$\frac{4ab}{3n} = \frac{2a}{3bb}(\frac{mbb}{a} - x)^3 - \frac{mmbb}{2a}(\frac{mbb}{a} - 2x) - \frac{2a}{3bb}x^3$$

Man setze der Kürze halben $\frac{mbb}{a} = c$ so wird

$$\frac{4ab}{3n} = \frac{2a}{3bb}(c - x)^3 - \frac{mc}{2}(c - 2x) - \frac{2a}{3bb}x^3 \text{ oder}$$

$$\frac{2b^3}{n} = (c - x)^3 - \frac{3mcbb}{4a}(c - 2x) - x^3 \text{ das ist, weil } \frac{mbb}{a} = c$$

$$\frac{2b^3}{n} = (c - x)^3 - \tfrac{3}{2}cc(\tfrac{1}{2}c - x) - x^3; \text{ oder da}$$

$$(c - x)^3 = (\tfrac{1}{2}c + (\tfrac{1}{2}c - x))^3 = \tfrac{1}{8}c^3 + \tfrac{3}{4}cc(\tfrac{1}{2}c - x) + \tfrac{3}{2}c(\tfrac{1}{2}c - x)^2 + (\tfrac{1}{2}c - x)^3$$

und $x^3 = (\frac{1}{2}c - (\frac{1}{2}c - x))^3 = \frac{1}{8}c^3 - \frac{3}{4}cc(\frac{1}{2}c - x) + \frac{3}{2}c(\frac{1}{2}c - x)^2$
$-(\frac{1}{2}c - x)^3$

so wird $\frac{2b^3}{n} = \frac{3}{2}cc(\frac{1}{2}c - x) + 2(\frac{1}{2}c - x)^3 - \frac{3}{2}cc(\frac{1}{2}c - x)$

das ist $(\frac{1}{2}c - x)^3 = \frac{b^3}{n}$ und folglich $\frac{1}{2}c - x = \frac{b}{\sqrt[3]{n}}$

also $x = \frac{1}{2}c - \frac{b}{\sqrt[3]{n}} = \frac{mbb}{2a} - \frac{b}{\sqrt[3]{n}}$

Wir bekommen also für den ersten gesuchten n Theil MENM

$PM = \frac{mbb}{2a} - \frac{b}{\sqrt[3]{n}}$ und folglich

$QN = \frac{mbb}{2a} + \frac{b}{\sqrt[3]{n}}$; $PM + QN = \frac{mbb}{a}$; $PM - QN = \frac{-2b}{\sqrt[3]{n}}$

$AP = \frac{a}{bb}(\frac{mbb}{2a} - \frac{b}{\sqrt[3]{n}})^2 = a(\frac{mb}{2a} - \frac{1}{\sqrt[3]{n}})^2$

$AQ = \frac{a}{bb}(\frac{mbb}{2a} - \frac{b}{\sqrt[3]{n}})^2 = a(\frac{mb}{2a} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}})^2$

Setzet man nun weiter für n; $\frac{1}{2}n$, $\frac{1}{3}n$, $\frac{1}{4}n$, u. s. w. so bekömmt man aus diesen Formuln die Lage der II, III, IV, und s. w. Parallellinie, welche nämlich die ganze Parabel in n gleiche Theile zerschneiden.

Erste Anmerkung. Bey dieser Auflösung aber ist wohl zu beobachten, daß weil wir die Parabel nur bis an die Grundlinie CD eingeschrenkt haben, die Applicate NQ nicht größer werden kann, als die halbe Grundlinie BD; das ist $\frac{mb}{2a} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ muß $<$ seyn als 1. Im Fall nun dieses nicht gefunden würde, oder daß $\frac{mb}{2a} + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > 1$, so wird der Punct der Parabel N unter der Grundlinie fallen, und die Auflösung der Aufgabe selbsten ganz anders eingerichtet werden müssen.

Man setze also die Linie MN (4 Fig.) die den gegebenen Theil der ganzen Parabel abschneidet, falle mit dem andern Ende N auf der Grundlinie BD; also daß hier MEDNM der gesuchte Theil oder $MEDNM = \frac{4ab}{3n}$; tang MNO aber $= m$ sey.

Es sey wiederum $PM = x$, so wird

$AP = \frac{axx}{bb}$; $PB = a - \frac{axx}{bb}$; $ON = \frac{a}{m}(1 - \frac{xx}{bb})$; $BN = x + \frac{a}{m}(1 - \frac{xx}{bb})$

der Innhalt von $PMNB = \frac{1}{2} PB (PM + BN)$

$$\frac{1}{2}(a - \frac{axx}{bb})(2x + \frac{a}{m}(1 - \frac{xx}{bb}))$$

oder $PMNB = ax(1 - \frac{xx}{bb}) + \frac{aa}{2m}(1 - \frac{xx}{bb})^2$

Es ist aber der Innhalt von

$APMA = \frac{2a}{3bb}x^3$ und

$ABDA = \frac{2ab}{3}$

Da nun der Innhalt von $MEDN = \frac{4ab}{3n} = ABDA - APMA - PMNB$ ist, so erhalten wir folgende Gleichung

$$\frac{4ab}{3n} = \frac{2ab}{3} - \frac{2a}{3bb}x^3 - ax(1 - \frac{xx}{bb}) - \frac{aa}{2m}(1 - \frac{xx}{bb})^2$$

welche sich durch die Entwickelung in diese verwandelt

$$x^4 - \frac{2mbb}{3a}x^3 - 2bbxx + \frac{2mb^4}{a}x + b^4 - \frac{4mb^5}{3a}(1 - \frac{2}{n}) = 0.$$

Zweyte Anmerkung. Wann wir in der eben gefundenen Gleichung m das ist tang MNO unendlich groß annehmen, so erhalten wir für den schon oben behandelten zweyten Fall

$$-\frac{2mb}{3a}x^3 + \frac{2mb^4}{a}x - \frac{4mb^5}{3a}(1 - \frac{2}{n}) = 0.$$

 Und

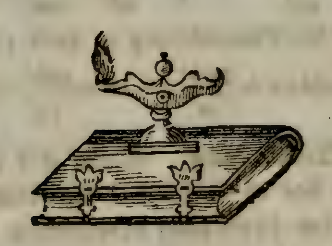
Und wenn man diese Gleichung durch $\frac{-2mbb}{3a}$ theilt

$$x^3 - 3bbx + 2b^3 (1 - \tfrac{2}{n}) = 0.$$

So wie wir diese Gleichung auch schon an dem eben bemeldten Orte herausgebracht haben. (§. 4.)

Auf eine ähnliche Art kann man auch den Werth von AP in dem ersten Fall (§. 3.) aus der in dem dritten Falle für AP (§. 5.) gefundenen Werthe herausbringen, wenn man nämlich in diesem m das ist tang MNO $= o$ setzt.

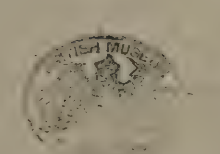
Dritte Anmerkung. Wenn bey einer Berechnung des dritten Falles für die Linie PM ein negativer Werth gefunden wird, so muß das Punct M der Parallellinie MN auf der andern Seite AC der Parabel angenommen oder abgestochen werden. Und dieses war auch der Grund, warum ich hier nicht die der Parallellinie MN zukommende Abscisse AP, wie bey den beyden vorhergehenden Fällen gesuchet, sondern derselben lieber die Entfernung PM vorgezogen. Es bestimmt nämlich jene (Abscisse) nicht diejenige Seite, wo das eine End M der Parallellinie MN hinfällt; bey den beyden ersten Fällen aber war diese Behutsamkeit nicht so nöthig.



Johann

Fig. 1

Fig. 2



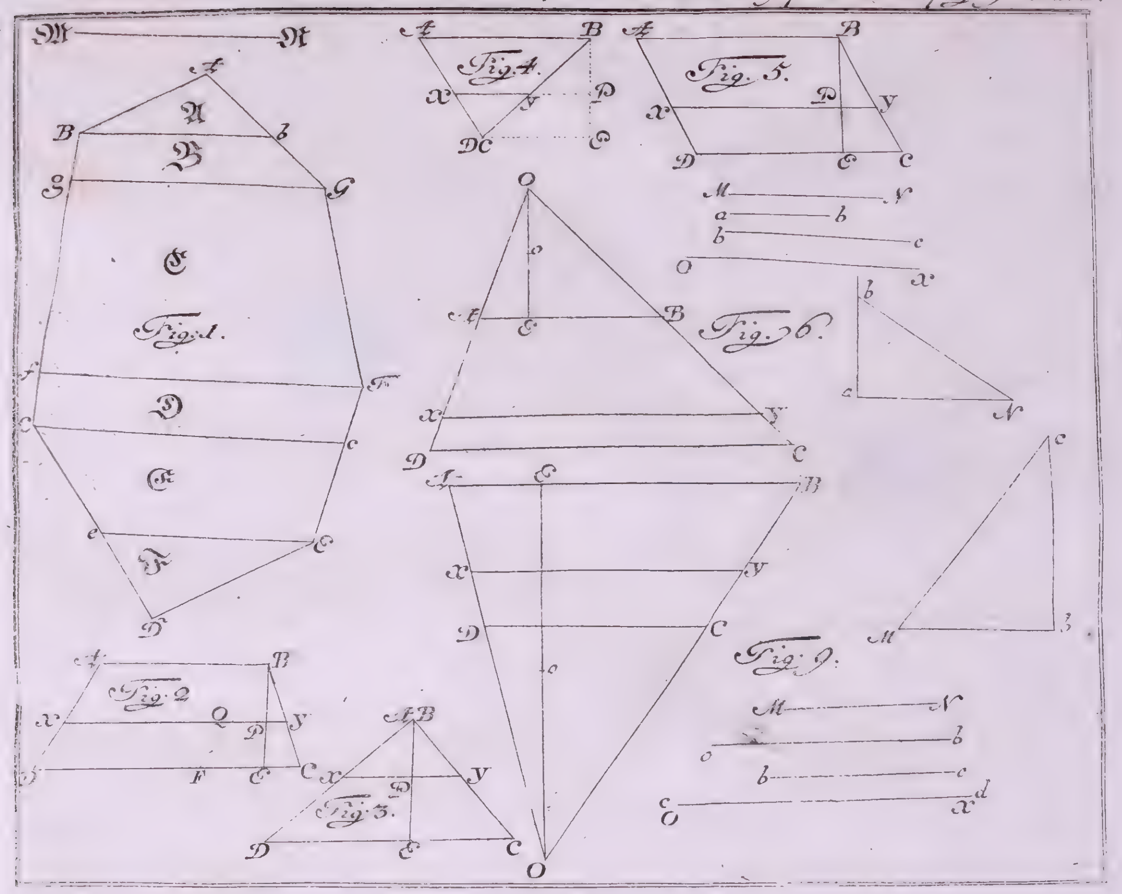
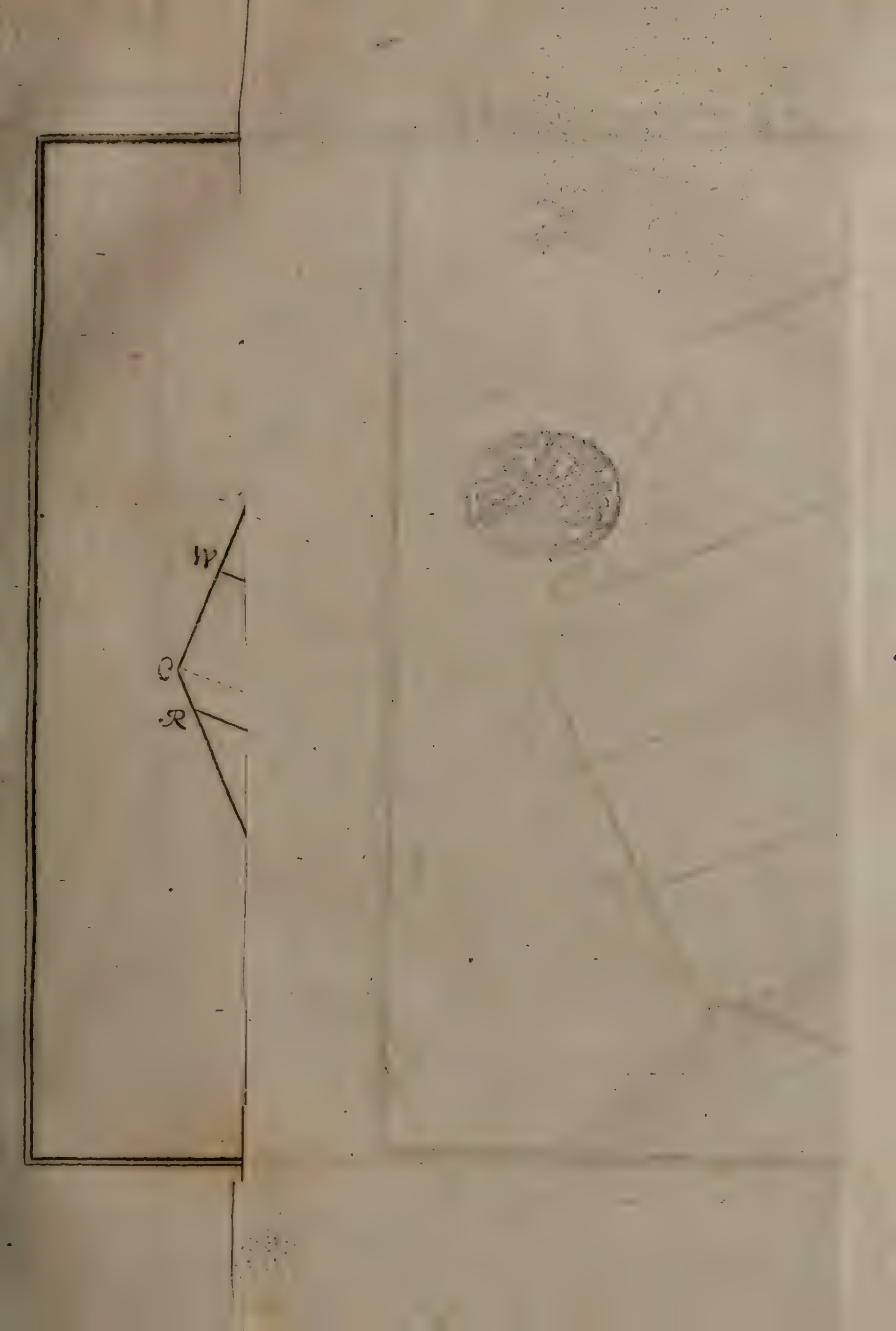
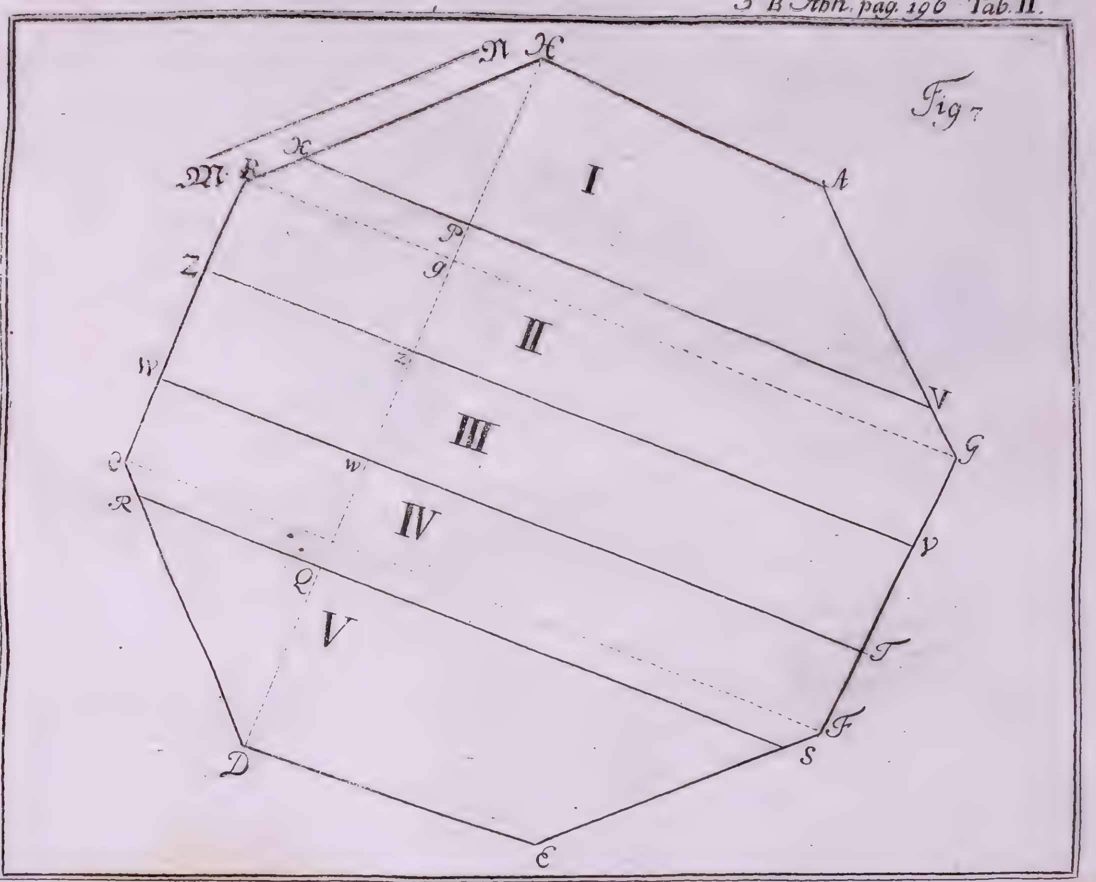
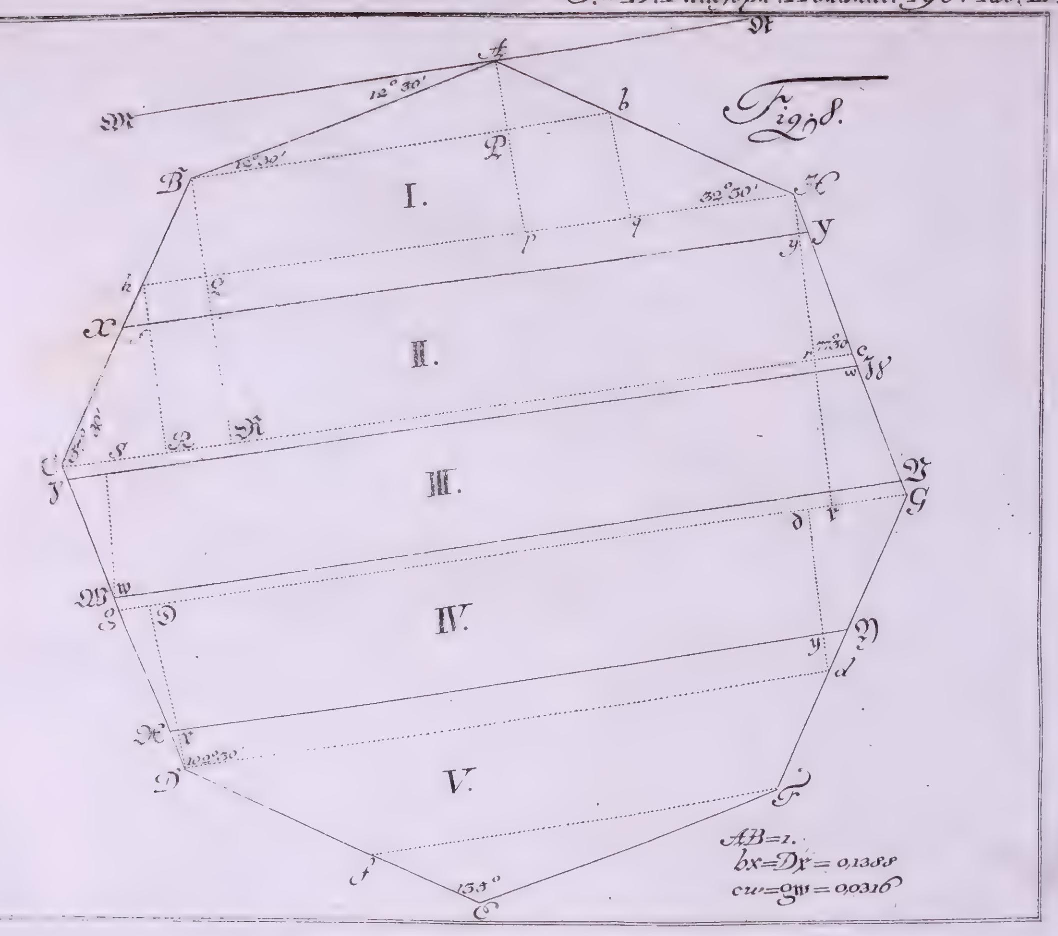


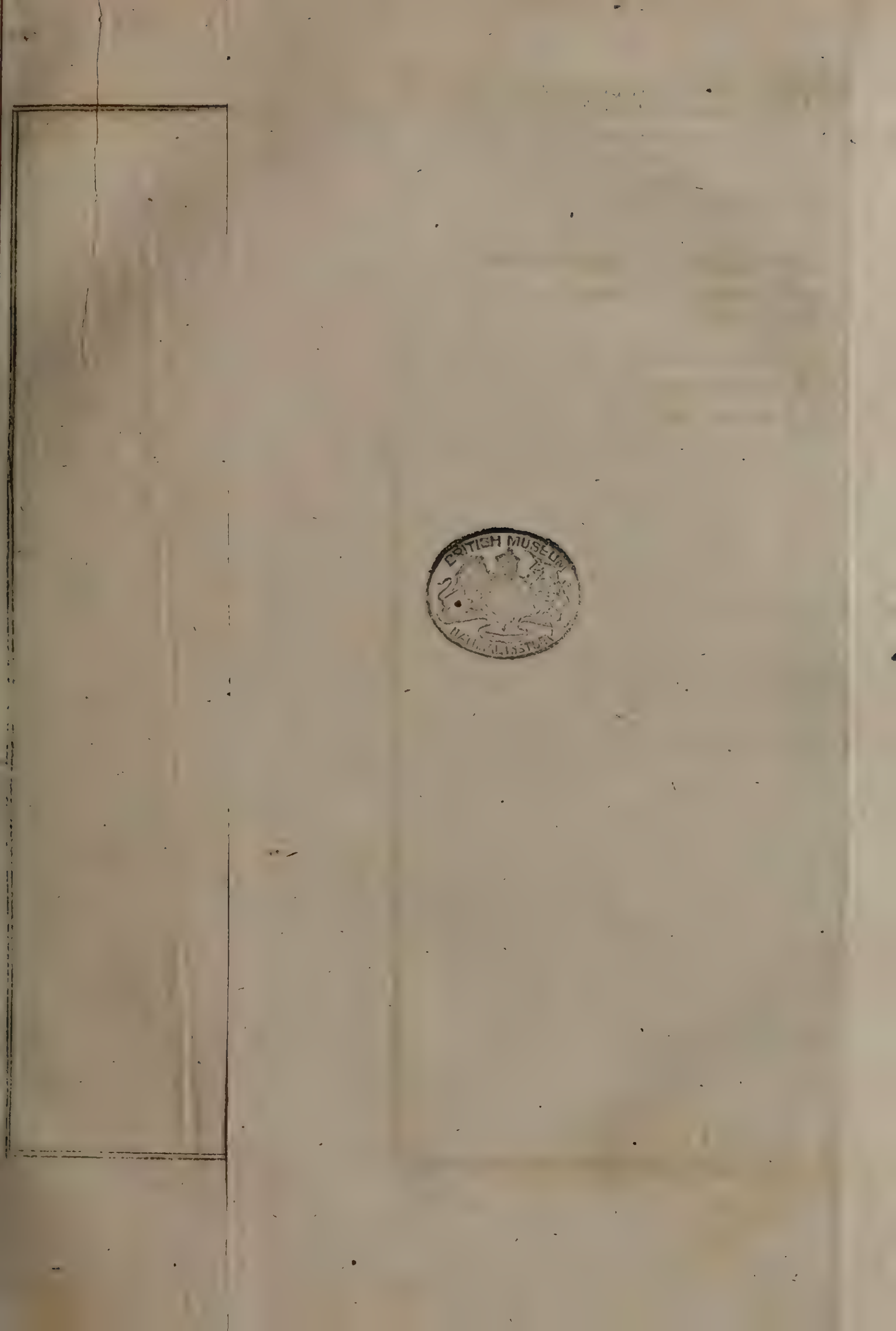
Fig. 1.
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 9.

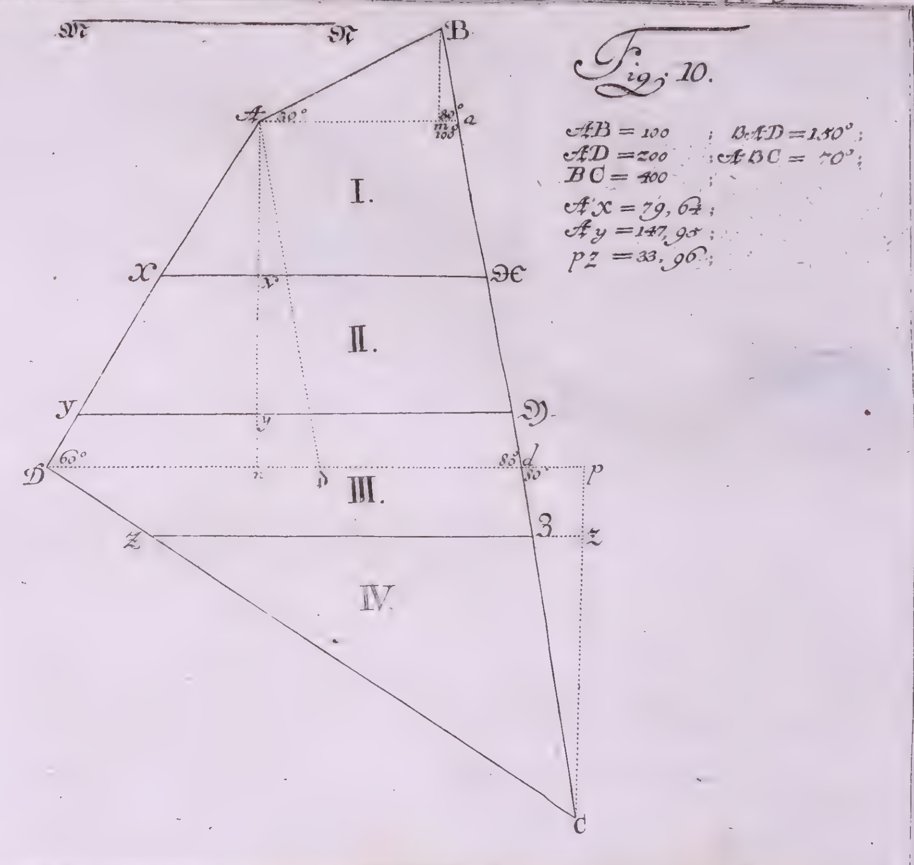


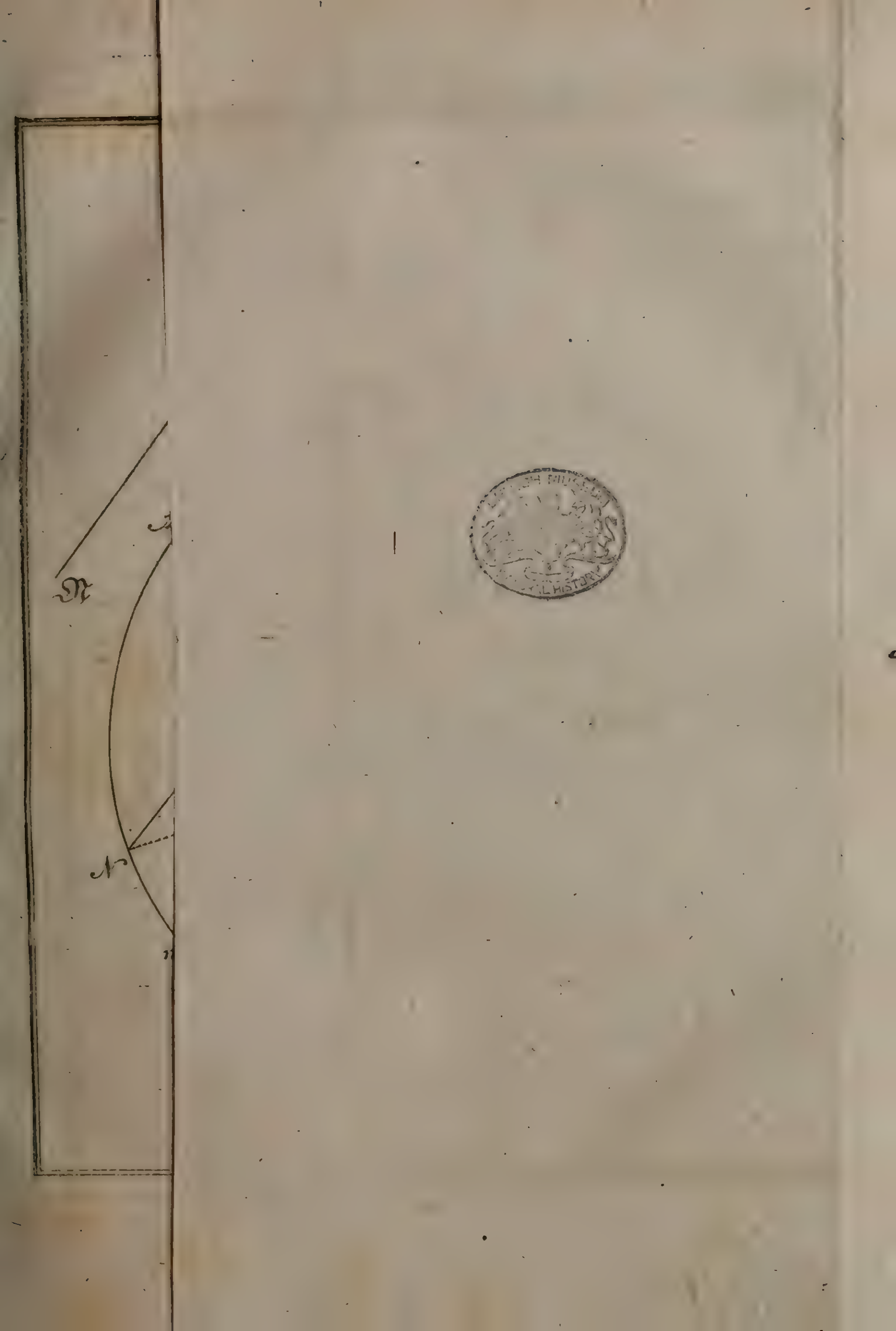

Fig 7
N
H
M
R
K
A
I
P
g
Z
II
z
W
V
III
G
C
w
R
IV
Y
Q
V
T
F
S
D
E

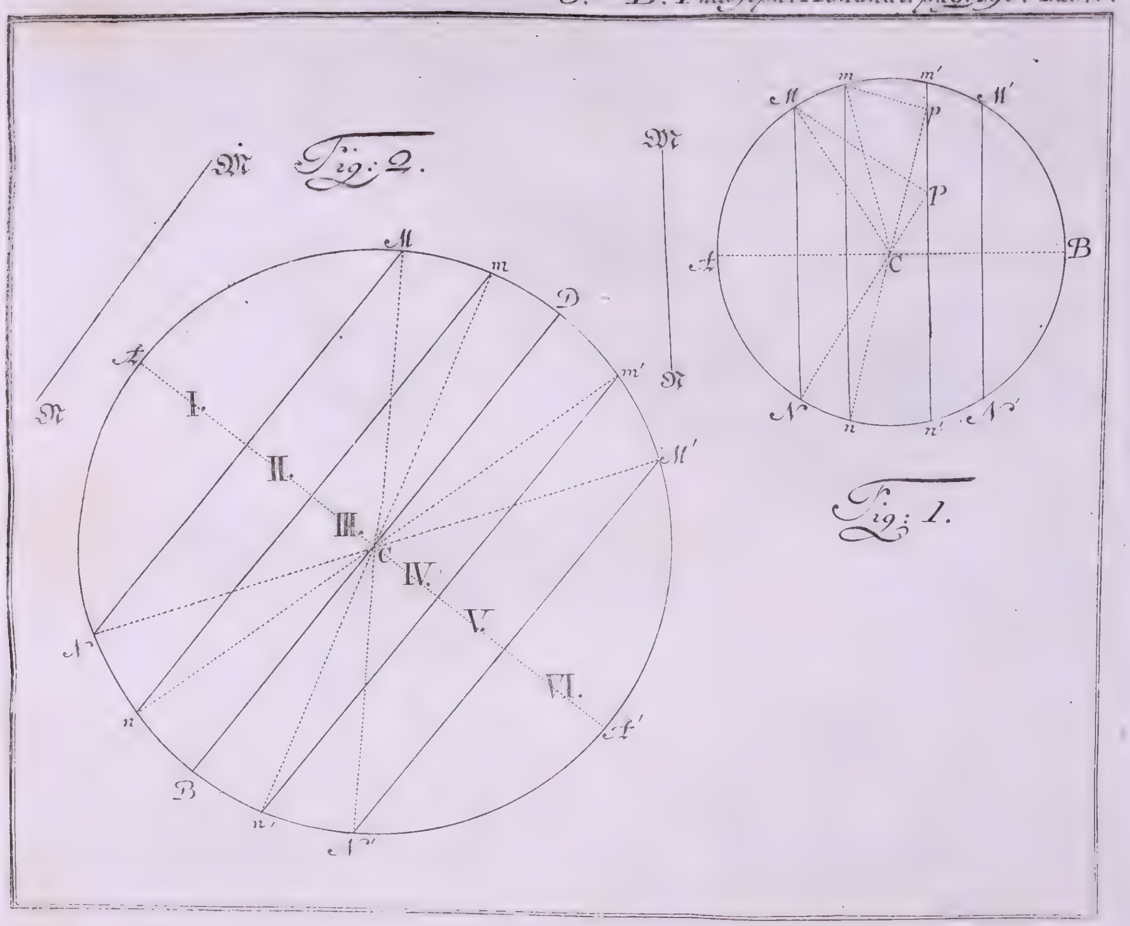



Fig. 8.
I.
II.
III.
IV.
V.
12° 30'
32° 30'
102° 30'
135°
AB=1.
bx=Dx=0,1388
cw=gw=0,0316


BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY


Fig. 10.
AB = 100 ; BAD = 150° ;
AD = 200 ; ABC = 70° ;
BC = 400 ;
AX = 79, 64 ;
Ay = 147, 95 ;
pZ = 33, 96 ;
I.
II.
III.
IV.




Fig: 2.
M
N
M
m
D
A
m'
M'
I.
II.
III.
C
IV.
V.
VI.
N
n
B
n'
N''
A'
M
N
Fig: 1.
m
m'
M
M'
p
P
A
C
B
N
n
n'
N'

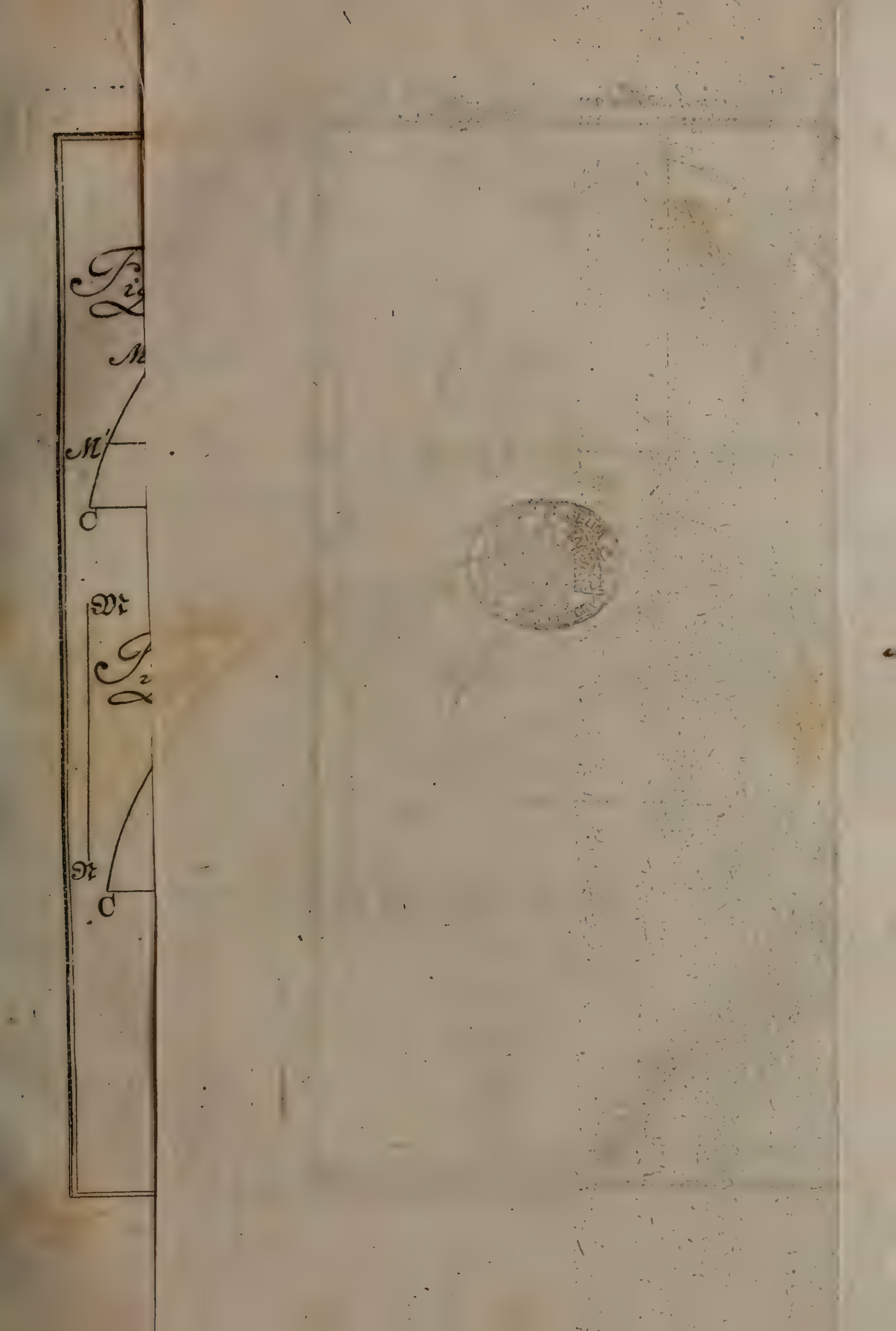


Fig. 1.

Fig. 4.

Fig. 2.

Fig. 5.

Fig. 3.

J. Albrecht Eulers
Versuch
die Figur der Erden durch Beobachtungen des Monds zu bestimmen.



Als die Pariserakademie der Wissenschaften den höchstrühmlichen Entschluß faßte, die Parallaxe des Monds auf das genaueste zu bestimmen, so wurden zu diesem Ende zwey ihrer geschicktesten Mitglieder (*) an zwey weit von einander entfernte und (so viel als es möglich war) auf einem und eben demselben Mittagskreise gelegene Oerter verschicket, um daselbst die mittäglichen Höhen des Mondes auf das fleißigste zu beobachten. Es würde aber nichts destoweniger dieser beyden Mitglieder Mühe und Fleiß fruchtlos geblieben seyn, und die Akademie würde sich auch nicht geschmeichelt haben, die wahre Parallaxe des Mondes aus diesen ihren Beobachtungen herausbringen zu können, wenn sie sich vorhero nicht von der wahren Figur der Erde durch die bekannten Ausmessungen versichert hätte. Wäre die Erde vollkommen kugelrund, so hätte die Bestimmung der

(*) Die Herren de la Caille und de la Lande: ersterer war nach dem Vorgebürge der guten Hofnung und letzterer nach Berlin abgereiset; außer diesen hatte sich noch der verstorbene Professor Grischow mit Genehmhaltung der rußisch-kaiserlichen Akademie zu Petersburg nach der Insel Oesel begeben, um daselbst mit ersteren gemeinschaftlich die Mondshöhen zu beobachten.

der Parallaxe keine Schwierigkeit auf sich. Denn da alsdenn beyde Beobachter, an welchen Oertern des Mittagskreißes sie sich auch befänden, gleichweit von dem Mittelpunct der Erde entfernt wären, so würde durch ihre übereinstimmenden Beobachtungen die Entfernung des Monds durch eine und eben dieselbe Einheit, nämlich durch den Halbmesser der Erde bestimmt, und die Parallaxe des Monds leicht gefunden werden können.

Eine ganz andere Bewandtniß aber hat es hingegen, da die Erde in der That nicht genau kugelrund ist: dann weil in diesem Fall die Beobachter sich meistentheils in verschiedenen Entfernungen von dem Mittelpunct der Erde befinden, so ist eine genaue Känntniß dieser Verschiedenheit der Entfernungen und ihrer wahren Größe unumgänglich nöthig, um die wahre Entfernung des Monds von dem Mittelpunct der Erde, und seine Parallaxe aus den Beobachtungen schließen zu können.

Da es also unläugbar ist, daß die auf einem nnd eben demselben Mittagskreise beobachteten Mondshöhen von der Figur der Erde abhängen, und diese hinwiederum einen Einfluß in jene nothwendig haben müsse, so stehet mit allem Recht zu vermuthen, daß die Beobachtungen der mittäglichen Mondshöhen darzu dienen könnten, die Figur der Erde aus denselben zu bestimmen. Es müßten nämlich zu diesem Ende verschiedene Beobachter die mittäglichen scheinbaren Höhen des Monds an eben so viel verschiedenen aber auf einem und eben demselben Mittagskreise gelegenen Oertern messen, und eine Vergleichung aller Höhen, so zu gleicher Zeit genommen worden sind, würde alsdenn die Figur des Mittagskreises geben, und folglich auch die ganze Figur der Erde, wenn sonsten dieselbe nicht gar zu unordentlich ist. Ob nun gleich diese Art die Figur der Erde zu bestimmen, allem Anscheine nach weit unter derjenigen zu setzen ist, deren sich

die

die Pariserakademie bedienet hatte, und durch welche uns die Figur der Erde so genau bekannt geworden ist, als es nur immer möglich seyn kann, so möchte es dennoch in einer andern Absicht nicht undienlich seyn, theils zu erforschen, wie die bemeldten Beobachtungen angewandt werden müßten, um aus denselben die Figur der Erde zu erkennen, theils auch zu prüfen, in wie weit man sich auf diese Bestimmung der Figur der Erde verlassen könne.

Der sicherste und natürlichste Weg aber, um dieses Vorhaben auszuführen, möchte wohl derjenige seyn, den ich einer erlauchten Akademie der Wissenschaften hiermit vorzulegen die Ehre habe.

Es soll gegenwärtige Abhandlung die Auflösung zweyer Aufgaben in sich enthalten. In der ersten derselben werde ich die Figur eines Mittagskreises als bekannt annehmen und bestimmen, unter welcher Höhe der Mond an einem jeden Orte dieses Mittagskreises zu der Zeit erscheinen muß, wenn derselbe durch den Mittag, das ist, durch die Ebene des Mittagskreises gehet.

Die Auflösung dieser Aufgabe wäre allein schon hinreichend, um auch hinwiederum die Figur eines Mittagskreises zu bestimmen, auf welchem wirklich die Mondshöhen genommen worden wären. Man müßte nämlich verschiedene Hypothesen annehmen, das ist, man müßte für die Figur des Mittagskreises verschiedene krumme Linien erwählen, und nach diesen Hypothesen die verschiedene mittägliche Mondshöhen berechnen; alsdenn aber diese Höhen mit denjenigen vergleichen, welche wirklich beobachtet worden sind; da es sich denn bald zeigen würde, welche Hypothese die wahre sey, das ist, mit welcher der angenommenen krummen Linien die wahre Figur des Mittagskreises übereinkäme.

In der Auflösung der letztern Aufgabe werde ich aber zeigen, wie die unter verschiedenen Polhöhen eines Mittagskreises beobachtete mittägliche Mondshöhen zu der Bestimmung der Figur dieses Mittagskreises unmittelbar führen könne.

Erste Aufgabe.

Die Figur der Erde ist bekannt; man soll für einen jeglichen Ort eines Mittagskreises die mittägliche Höhe des Mondes finden.

Auflösung. Es sey l (1 Figur) der Mittelpunct der Erde, Bb die An, B der Nordpal, und BYA ein Theil des Mittagskreises, auf welchem die mittägliche Höhen des Mondes bestimmet werden sollen. Es sey aber ☾ der Ort des Mondes zur Zeit seines Durchganges durch diesen Mittagskreis. Man setze die Entfernung des Mittelpuncts des Mondes von dem Mittelpunct der Erde ☾C$=f$ und den Winkel BC☾$=\xi$, welcher die geocentrische Entfernung des Monds von dem Nordpol misset. Es sey nun Y ein Ort des Mittagskreises, für welchen die mittägliche Mondshöhe bestimmet werden soll, und CX$=x$; XY$=y$ die beyden Coordinaten, welche die Lage dieses Orts bestimmen. Man ziehe YN auf dem Mittagskreise in Y senkrecht, und verlängere dieselbe, bis sie der Axe Bb in N begegnet, so wird der Winkel BNY das Complement der Polhöhe des Orts Y andeuten. Es sey dieser Winkel BNY$=\phi$ und also die Polhöhe des Orts Y$=90°-\phi$. Da nun NX$=\frac{-ydy}{dx}$ so wird $\frac{-dx}{dy}=$ tang ϕ und $\frac{-dy}{dx}$ der Tangens der Polhöhe in Y gleich seyn. Man verlängere die Perpendiculärlinie NY aufwärts, so wird dieselbe durch das Zeinth Z des Orts Y gehen. Man ziehe endlich Y☾ so giebt der Winkel ZY☾ die Entfernung des Monds von dem Zeinth

oder

oder das Complement der mittäglichen Mondshöhen. Es soll also dieser Winkel ZY☾ bestimmet werden.

Da der Winkel Bl☾ $= \xi$ und $BNY = \phi$ so wird der Winkel CON = YO☾ $= \xi - \phi$ und $CN = NR = \frac{-ydy}{dx} - x = -x + y \cot. \phi$. Folglich in dem Dreyeck CNO

$$CQ = \frac{-x \sin \phi + y \cos \phi}{\sin(\xi - \phi)}, \quad NO = \frac{-x + y \cot. \phi}{\sin(\xi - \phi)} \times \sin \xi.$$

Da nun $NY = \frac{y}{\sin\phi}$ und in dem Dreyeck OY☾:

$$O☾ = C☾ - CO = f + \frac{x \sin \phi - y \cos \phi}{\sin(\xi - \phi)}$$

$$OY = NY - NO = \frac{y}{\sin\phi} + \frac{x - y \cot \phi}{\sin(\xi - \phi)} \times \sin \xi = \frac{x \sin \xi - y \cos \xi}{\sin(\xi - \phi)}$$

Der Winkel YO☾ aber $= \xi - \phi$ ist, so wird der gesuchte Winkel ZY☾ durch diese Formul bestimmt und berechnet werden können.

$$\text{tang. } ZY☾ = \frac{f \sin(\xi - \phi) + x \sin \phi - y \cos \phi}{f \cos(\xi - \phi) - x \cos \phi - y \sin \phi}.$$

Andere und weit kürzere Auflösung,

In welcher der Mittelpunct der Erden nicht in Betrachtung gezogen wird.

Es sey BM (2 Fig.) die Axe der Erde, B der Nordpol: BYN der bewußte Mittagskreis, und ☾ der Ort des Monds zur Zeit seines Durchgangs durch diesen Mittagskreis. Man ziehe aus ☾ die grade Linie ☾G auf der verlängerten Axe MBG senkrecht und setze für den Ort des ☾ die Entfernungen $BG = g$: G☾ $= h$. Nun sey Y derjenige Ort des Mittagskreises, für welchen die mittägliche Höhe des Monds gesucht wird. Es werde gleichfalls aus Y die grade Linie YX auf der Axe Bb senkrecht gezogen, und die

Coordinaten oder Entfernungen $BX=x$, $XY=y$ genannt. Man ziehe durch Y die grade Linie YN auf dem Mittagskreis senkrecht, so wird dieselbe auf der einen Seite der Axe Bb in N begegnen, auf der andern Seite aber durch das Zenith Z desselben Orts Y gehen. Es deute wiederum ϕ das Complement der Polhöhe in Y an, so wird der Winkel $BNY=\phi$ und weil $XN=\frac{ydy}{dx}$ ist; $\frac{dx}{dy}=\text{tang}\,\phi$ und $\frac{dy}{dx}=\cot\phi$ seyn: Es sind uns demnach g, h, x, y und ϕ gegeben. Nun ziehe man endlich die grade Linie YV der Axe Bb parallel, welche folglich dem Beobachter in Y den Ort des Nordpols am Himmel zeigen wird. Der Winkel VY☾ wird also die scheinbare Entfernung des Monds ☾ von dem Nordpol V messen, und die scheinbare Entfernung des Monds von dem Zenith, oder das Complement der gesuchten mittäglichen Mondshöhen wird gefunden werden, wenn man von diesem Winkel VY☾ den Winkel $VYZ=\phi$ (oder das Complement der Polhöhe) abzieht.

Es ist aber $YV=g+x$; $V☾=h-y$, folglich tang $VY☾=\frac{h-y}{g+x}$: und die gesuchte mittägliche Höhe des Monds für den Ort $Y=90°-VY☾+\phi$.

Zusätze.

1. Man setze die Entfernung des Monds von dem Nordpol oder den Winkel $VY☾=\psi$, und seine Entfernung von dem Zenith oder den Winkel $ZY☾=\omega$; so ist $\psi=\phi+\omega$ und $\omega=\psi-\phi$. Wir haben aber gefunden tang $\psi=\frac{h-y}{g+x}$.

2. Wenn der Ort des Monds nicht bekannt, und folglich auch g und h nicht gegeben wären, so würden vor allen Dingen

gen zwey Beobachtungen erfordert werden, um zuerst dieser ihre Werthe berechnen zu können. Sind dieselben aber einmal gefunden worden, so wird die gegebene Formul auch für einen jeglichen andern Ort desselben Mittagskreises die scheinbare Höhe des Monds bey diesem seinem Durchgange durch den Mittagskreis geben.

3. Laßt uns also setzen, man hätte den Mond wirklich an zwey verschiedenen und auf einem Mittagskreise gelegenen Oertern zu gleicher Zeit beobachtet. Es wäre für den erstern Ort $x = p$; $y = q$ und man hätte durch die Beobachtung gefunden $\tang \psi = r$. Für den zweyten Ort aber wäre $x = P$; $y = Q$ und die Beobachtung hätte gegeben $\tang \psi = R$. Wir würden alsdann diese beyde Gleichungen erhalten

$r = \frac{h - q}{g + p}$ und $R = \frac{h - Q}{g + P}$ und hieraus hinwiederum folgende Werthe für h und g

$$g = \frac{Q - q + PR - pr}{r - R}; \quad h = \frac{Qr - pR + (P - p) rR}{r - R}$$

4. Wenn die Erde vollkommen kugelrund und $CB = CM = a$ der halbe Durchmesser derselben wäre, so würde $x = a - a \cos\phi$ und $y = a \sin\phi$, folglich

$\tang \psi = \frac{h - a \sin\phi}{g + a - a \cos\phi}$. Daraus wir dann, weil $\psi - \phi = \omega$ ist, folgende Gleichung ziehen

$(g + a) \sin\psi - h \cos\psi = a \sin\omega$. Man setze nun wiederum, daß eine andere zu gleicher Zeit und auf eben demselben Mittagskreis gemachte Beobachtung diese Gleichung gegeben hätte

$(g + a) \sin\psi^{\prime} - h \cos\psi^{\prime} = a \sin\omega^{\prime}$; so würde man durch die Vergleichung beyder Beobachtungen finden

$$g + a \frac{a(\sin\omega \cos\psi^{\prime} - \sin\omega^{\prime} \cos\psi)}{\sin(\psi - \psi^{\prime})} \text{ und } h = \frac{a(\sin\omega \sin\psi^{\prime} - \sin\omega^{\prime} \sin\psi)}{\sin(\psi - \psi^{\prime})}.$$

 Es

Es giebt aber die Summa der beyden Quadraten $(g+a)^2+h^2$ das Quadrat der Entfernung des Mondes ☾ von dem Mittelpunct der Erden C. Es wird also diese Entfernung selbsten seyn

$$C☾ = \frac{a\sqrt{(\sin\omega.\sin\omega+\sin\omega^1.\sin\omega^1-2\sin\omega.\sin\omega^1.\cos(\psi-\psi^1))}}{\sin(\psi-\psi^1)}.$$

Oder da der Winkel $\psi-\psi^1$ allemal sehr klein ist, und folglich sein Cosinus ohne merklichen Fehler dem Halbmesser l gleich gesetzt werden kann, so wird sehr genau $C☾ = \frac{\sin\omega-\sin\omega^1}{\sin(\psi-\psi^1)}a.$

5. Wir wollen anjetzo annehmen, die Erde wäre eine elliptische Spheroide; $CB=a$ wäre ihre halbe Axe und b der Halbmesser ihres Aequators. So werden wir erstlich für den Ort Y, dessen Zenith wir von dem Nordpol um den Winkel ϕ entfernt angenommen haben, erhalten

$$a-x = \frac{aa\cos\phi}{\sqrt{(aa\cos\phi.\cos\phi+bb\sin\phi.\sin\phi)}}$$

und $y = \frac{bb\sin\phi}{\sqrt{(aa\cos\phi.\cos\phi+bb\sin\phi.\sin\phi)}}$.

Und eine jede aus der Beobachtung geschlossene Entfernung des Monds von dem Nordpol, oder ein jeder Winkel ψ würde uns alsdann diese Gleichung geben

$$\text{tang}\,\psi = \frac{h\sqrt{(aa\cos\phi.\cos\phi+bb\sin\phi.\sin\phi)}-bb\sin\phi}{(g+a)\sqrt{(aa\cos\phi.\cos\phi+bb\sin\phi.\sin\phi)}-aa\cos\phi}.$$

Zwey zu gleicher Zeit auf einem Mittagskreise gemachte Beobachtungen werden aber wiederum die Werthe von $g+a$ und h geben, und die Formul $\sqrt{((g+a)^2+h^2)}$ wird alsdann die Entfernung des Monds von dem Mittelpuncte der Erde bestimmen. Wollte man endlich noch eine dritte Beobachtung zur Hülfe nehmen, so könnte man auch sogar im Stande seyn, die Verhältniß $a:b$ das ist die Gattung der Ellipsis zu bestimmen.

6. Um

6. Um diese Bestimmungen zu erleichtern und die gegebene Gleichung kürzer zu fassen, kann $\cot. \phi = m$: $\tang. \psi = n$; $b = va$: $g + a = ra$ und $h = sa$ gesetzt werden: Es wird aber alsdenn eine jegliche Beobachtung eine dergleichen Gleichung geben $n = \frac{s\sqrt{(mm + vv)} - vv}{r\sqrt{(mm + vv)} - m}$: aus deren dreyen hernach die Werthe der unbekannten Größen r, s, und v bestimmet werden müssen.

Prüfung.

Man nehme den Ort des Mondes für bekannt an, und setze $r = 10$; $s = 60$ oder $g = 9a$: $h = 60a$, wo nämlich a die halbe Axe der Erde andeutet. Man nehme auch die Figur der Erde als bekannt an, und setze

1. Die Erde wäre eine vollkommene Kugel deren Halbmesser also $= a$ ist. Man berechne nach der gegebenen Formul die mittägliche Höhe des Monds für drey verschiedene Oerter eines und eben desselben Mittagskreises, und es seyen die Entfernungen dieser Oerter von dem Nordpol 30°, 80° und 120°, oder ihre Polhöhen 60°, 10° nördlich und 30° südlich: so wird für die Entfernung des Orts von dem Nordpol, oder für den Winkel $\phi =$

30°. 80°. 120°.

Die scheinbare Entfernung des Monds von dem Nordpol, oder der Winkel $\psi =$

81°.. 16'.. 21". 80°.. 32'.. 48". 79°.. 55'.. 54"

Folglich die mittägliche Höhe des Monds $90° + \phi - \psi$.

38°.. 43'.. 39". südlich 89°.. 27'.. 12" südlich. 49°.. 55'.. 54" nördlich.

2. Wenn wir aber nach den Ausmessungen der Pariser-akademie annehmen, die Erde wäre eine Spheroide, deren Durchmesser um den 200sten Theil größer ist als die Axe; oder wenn wir

setzen

setzen $b = 1\frac{1}{200}a$, so werden wir durch unsere Formul folgende mittägliche Mondshöhen heraus bringen.

Für die Entfernung des Orts von dem Nordpol, oder für den Winkel $\phi =$

30°. 80°. 120°.

Die scheinbare Entfernung des Monds von diesem Nordpol, oder der Winkel $\psi =$

81°.. 16'.. 12". 80°.. 32'.. 42". 79°.. 55'.. 57".

Folglich die mittägliche Höhe des Monds $90° + \phi - \psi$.

38°.. 43'.. 48" südlich 89°.. 23'.. 18" südlich 49°.. 55'.. 57" nördlich.

3. Endlich wenn wir die zwey erstere mittägliche Höhen des Monds, so wie wir dieselben in der ersten Voraussetzung gefunden haben, als wirkliche Beobachtungen betrachten, und überdem für die Figur der Erde annehmen $b = 1\frac{1}{200}a$; also daß $v = 1,05$ so werden wir erhalten

Erstlich für den Ort des Mondes $r = \frac{109270}{10959} = 9,9708$

und $s = \frac{656708}{10959} = 59,9240$

zweytens für den dritten Ort, dessen Breite 30° südlich ist, die scheinbare Entfernung des Monds von dem Pol, oder den Winkel $\psi = 79°.. 56' 2'$, folglich die Höhe des Monds von Norden an gerechnet $= 49°.. 56'.. 2"$.

Schluß.

Aus dieser Prüfung erhellet ganz deutlich, in wie weit man sich auf diejenige Bestimmung der Figur der Erde verlassen könne, welche durch die Beobachtungen des Monds heraus gebracht werden kann, und wie genau diese Beobachtungen angestellt werden müß-

müßten, wenn man sicher seyn wollte, daß jene Bestimmung von der Wahrheit nicht gar zu beträchtlich abwiche. Denn so günstig wir auch zu unserm Vorhaben die Oerter der drey angeführten obgleich erdichteten Beobachter erwählet hatten, so sehen wir nunmehro dennoch, daß um die wahre Figur der Erde, aus derselben Beobachtungen zu schließen, nothwendig erfordert werde, daß man von diesen Beobachtungen bis auf eine Secunde gewiß sey: in wie weit dieses aber möglich sey, mögen geübte Beobachter urtheilen. Indessen könnte allemal eine große Menge von Beobachtungen diesen Mangel der Genauigkeit ersetzen, und wenn sich dermaleins drey oder mehrere Beobachter auf einem und eben demselben Mittagskreise befinden sollten, so möchte der gegenwärtige Entwurf nicht gänzlich ohne Nutzen ausgeführet werden können. Um dieser Ursachen willen werde ich mich auch nicht abschröcken lassen, die versprochene Auflösung der zweyten Aufgabe beyzusetzen; in welcher nämlich noch kürzlich gezeigt werden soll, wie die Figur der Erde unmittelbar aus den beobachteten mittäglichen Höhen des Monds bestimmet werden kann.

Letzte Aufgabe.

Die mittägliche Höhe des Monds ist an vielen auf einem und eben demselben Mittagskreise gelegenen Oertern zu gleichen Zeiten beobachtet worden; man soll die Figur der Erde bestimmen.

Auflösung.

Ich setze hier vor allen Dingen voraus, daß die Polhöhe oder Breite eines jeden Orts bekannt ist; oder, welches auf eins heraus kömmt, daß man für einen jeden Ort den Winkel ϕ, welcher die Entfernung des Pols von dem Zenith andeutet, weis. Da nun auch für einen jeden dieser Oerter der Winkel ψ oder die Entfernung des Monds von demselben Pol aus der Beobach-

tung geschlossen wird; so kann eine aufmerksame Vergleichung dieser beyden Werthen von ϕ und ψ paarweis genommen, leicht zeigen, wie dieser Winkel ψ von jenem ϕ abhänge: das ist, man wird nicht ohne große Mühe diejenige Gleichung errathen können, welche auf eine allgemeine Art zwischen diesen beyden Winkeln ψ und ϕ Statt finden müßte; zumal da die Figur der Erde schon einigermaßen bekannt ist. Ich nehme also diese erwehnte Gleichung als bekannt an. Es sey nun Y derjenige Ort, dessen Zenith von dem Nordpol um den Winkel ϕ entfernt ist, und man setze für diesen Ort Y, die Coordinaten $BX = x$; $XY = y$. Man verlangt also eine Gleichung zwischen x und y. Da $\frac{dx}{dy} = \text{tang}\,\phi$: $\text{tang}\,\psi = \frac{h-y}{g+x}$: so wird aus dieser $y = h - (g+x)\,\text{tang}\,\psi$: folglich $dy = -dx\,\text{tang}\,\psi - \frac{(g+x)\,d\psi}{\text{cos}\,\psi^2}$, und weil aus jener Gleichung $dy = \frac{dx}{\text{tang}\,\phi}$; so wird

$$\frac{dx}{g+x} = \frac{-d\psi\,\text{tang}\,\phi}{\text{cos}\,\psi^2\,(1+\text{tang}\,\phi.\,\text{tang}\,\psi)} = \frac{-d\psi\,\text{sin}\,\phi}{\text{cos}\,\psi.\,\text{cos}\,(\psi-\phi)}\ \text{seyn.}$$

Man bringe nun den Winkel ω, der $= \psi - \phi$ ist, in die Rechnung, so wird, da ψ durch ϕ bekannt ist, auch ψ durch ω bestimmet werden können. Man wird also eine Gleichung zwischen ψ und ω erhalten. Es ist aber, wenn wir $\psi - \phi = \omega$ und $\phi = \psi - \omega$ setzen

$$\frac{dx}{g+x} = \frac{-d\psi\,\text{sin}\,(\psi-\omega)}{\text{cos}\,\psi\,\text{cos}\,\omega} = \frac{-d\psi\,\text{sin}\,\psi}{\text{cos}\,\psi} + \frac{d\psi\,\text{sin}\,\omega}{\text{cos}\,\omega}$$

Folglich $l\,(g+x) = l\,\text{cos}\,\psi + \int \frac{d\psi\,\text{sin}\,\omega}{\text{cos}\,\omega} + l\,C$

Da nun allemal $\int \frac{d\psi\,\text{sin}\,\omega}{\text{cos}\,\omega}$ durch die bekannte Gleichung zwischen

ψ und ω gefunden werden kann, so sey $\int \frac{d\psi \sin\omega}{\cos\omega} = l\triangle$: und wir werden erhalten $l(g+x) = l\cos\psi + l\triangle + lC$ das ist $g+x = C\triangle \cos\psi$: Folglich da $y = h - (g+x) \tan\psi$, so werden die gesuchte Werthe der Coordinaten x und y seyn
$x = -g + C\triangle \cos\psi$; $y = h - C\triangle \sin\psi$.

Zu einer noch größern Bequemlichkeit wollen wir die Coordinaten des Orts Y von dem Ort ☾ des Monds an rechnen, und also setzen ☾$V = h - y = Y$; $VY = g + x = X$; und wir werden erhalten $X = C\triangle \cos\psi$; $Y = C\triangle \sin\psi$, folglich $\cos\psi = \frac{X}{C\triangle}$; $\sin\psi = \frac{Y}{C\triangle}$. Man setze ferner die Entfernung des Monds von dem Orte Y oder die grade Linie Y☾ $= Z$; so wird $ZZ = XX + YY$ folglich $Z = C\triangle$. Da nun der Werth von $\triangle$ durch ψ bestimmet wird, da nämlich $l\triangle = \int \frac{d\psi \sin\omega}{\cos\omega}$, und $\cos\psi = \frac{X}{Z}$ und $\sin\psi = \frac{Y}{Z}$ ist, so kann derselbe Werth vor $\triangle$ auch durch die Coordinaten X, Y, und $Z = \sqrt{(XX + YY)}$ bestimmet werden. Die Gleichung $Z = C\triangle$ wird aber alsdenn nur eine Gleichung zwischen X und Y seyn, durch welche wir folglich die gesuchte Figur des Mittagskreises, und hiemit auch die Figur der ganzen Erde erkennen werden.

Exempel.

Laßt uns setzen, die Beobachtungen des Monds hätten uns auf folgende Gleichung zwischen den Winkeln ψ und ϕ gebracht $\sin(\psi - \phi) = n \sin(\psi - \alpha)$, und welche uns hernach, da $\psi - \phi = \omega$ ist, diese Gleichung $\sin\omega = n \sin(\psi - \alpha)$ gegeben. Es

deutet aber wie bewußt ψ den Winkel VY ☾ oder die Entfernung des Monds von dem Nordpol, und ω den Winkel ZY ☾ oder die Entfernung des Monds von dem Zenith an.

Da nun $\cos\omega = \surd(1 - nn \sin(\psi - \alpha)^2) = \surd(1 - nn + nn \cos(\psi - \alpha)^2)$, so wird $l ♎ = \int \frac{nd\psi \sin(\psi - \alpha)}{\surd(1 - nn + (nn\cos(\psi - \alpha)^2)}$ folglich

$l ♎ = l(\surd(1 - nn + nn \cos(\psi - \alpha)^2) - n \cos(\psi - \alpha))$

und $♎ = \surd(1 - nn + nn \cos(\psi - \alpha)^2) - n \cos(\psi - \alpha)$. Es ist aber $♎ = \frac{Z}{C}$, also auch

$\surd(1 - nn + nn \cos(\psi - \alpha)^2) - n \cos(\psi - \alpha) = \frac{Z}{C}$ oder

$\surd(1 - nn \sin(\psi - \alpha)^2) - n \cos(\psi - \alpha) = \frac{Z}{C}$;

$\surd(1 - nn \sin(\psi - \alpha)^2) = \frac{Z}{C} + n \cos(\psi - \alpha)$.

Und nachdem das Wurzelzeichen weggebracht worden ist

$$\frac{ZZ}{CC} + \frac{2nZ}{C} \cos(\psi - \alpha) = 1 - nn$$

Weil nun $\cos(\psi - \alpha) = \cos\psi . \cos\alpha + \sin\phi . \sin\alpha = \frac{X\cos\alpha + Y\sin\alpha}{Z}$; und $ZZ = XX + YY$, so wird

$XX + YY + 2nC(X\cos\alpha + Y\sin\alpha) = (1 - nn)CC$ und welche die gesuchte Gleichung für die Figur des Mittagskreises ist. Man schreibe $-a$ für die beständige Größe C, welche, da sie durch die Integration in der Rechnung gekommen ist, gänzlich von unserer Willkuhr abhängt. So wird $XX + YY - 2na(X\cos\alpha + Y\sin\alpha) = (1 - nn)aa$; folglich

$$(X - na\cos\alpha)^2 + (na\sin\alpha - Y)^2 = aa.$$

Hieraus erhellet nun, daß die Figur des Mittagskreises BYN eine Zirkellinie ist, dessen Halbmesser $= a$ ist. Es sey C der

Mit=

Mittelpunct dieser Zirkellinie und $CB = a$ desselben Halbmesser; so muß (weil $CX^2 + XY^2 = aa$;) $na \cos\alpha$ die Entfernung GC und $na \sin\alpha$ die Entfernung ☾G geben; der Buchstaben α drückt folglich den Winkel GC☾ und na die Entfernung C☾ des Monds von dem Mittelpunct der Erde aus. Weil nun dieser Winkel α und diese Zahl n durch die Gleichung $\sin\omega = n \sin(\psi - \alpha)$ erkannt worden, so nehme man den Halbmesser der Erde a nach Belieben an, und mache ☾$G = na \sin\alpha$ und $GC = na \cos\alpha$; so wird der Punct C das Mittelpunct der Erde in Ansehung des Monds geben, $BM = 2a$ aber wird desselben Axe seyn. Und auf diese Weise werden alsdann die Erscheinungen des Monds auf dem Mittagskreise BYM denen Beobachtungen und der daraus geleiteten Gleichung $\sin\omega = n \sin(\psi - \alpha)$ vollkommen gemäß seyn; $\psi - \alpha$ aber deutet hier die Parallel der Höhe an.

Schluß.

Dieses Exempel ist hinreichend, um daraus zu erkennen, wie die angezeigte Methode, die Figur der Erde zu bestimmen, angewandt werden müsse. Und es erhellet auch zugleich, daß diese Aufgabe an und für sich selbsten unbestimmt sey. Denn wie auch immer diejenige Figur des Mittagskreises beschaffen seyn mag, welche der Gleichung zwischen ψ und ϕ ein Genügen leistet; so wird eine jegliche andere Figur, so jener ähnlich ist, und auch in Ansehung des Mondes eine ähnliche Lage hat, derselben Gleichung gleichfalls ein Genüge leisten. Wenn man nur dieses dabey beobachtet, daß die Axe der Erde oder die Richtung ihrer beyden Polen auf die gerade Linie ☾G, welche durch den Mittelpunct des Monds nach Belieben gezogen wird, senkrecht stehe.

Schließlich sieht man leicht ein, daß diese Methode die Figur der Erde zu bestimmen, größtentheils nur deswegen unsicher, und derjenigen hintan zu setzen sey, deren sich die Pariserakademie bedienet hatte, weil die Entfernung des Mondes in Ansehung der Axe der Erde sehr groß ist. Denn wenn der Mond der Erde weit näher wäre, oder wenn sich in der Nähe des Erdballs ein anderer Körper befände, den man dennoch an allen Orten eines Mittagskreises sehen könnte, so würde die hier angezeigte Methode, die Figur der Erde zu bestimmen, die allersicherste und gewiß weit bequemer seyn, als diejenige ist, welche sich auf die Ausmessung der verschiedenen Graden durch Dreyecke gründet. Die Bestimmung des Halbmessers der Erde würde aber, sobald die Figur dessen bekannt ist, von wenig Erheblichkeit seyn.



Johann

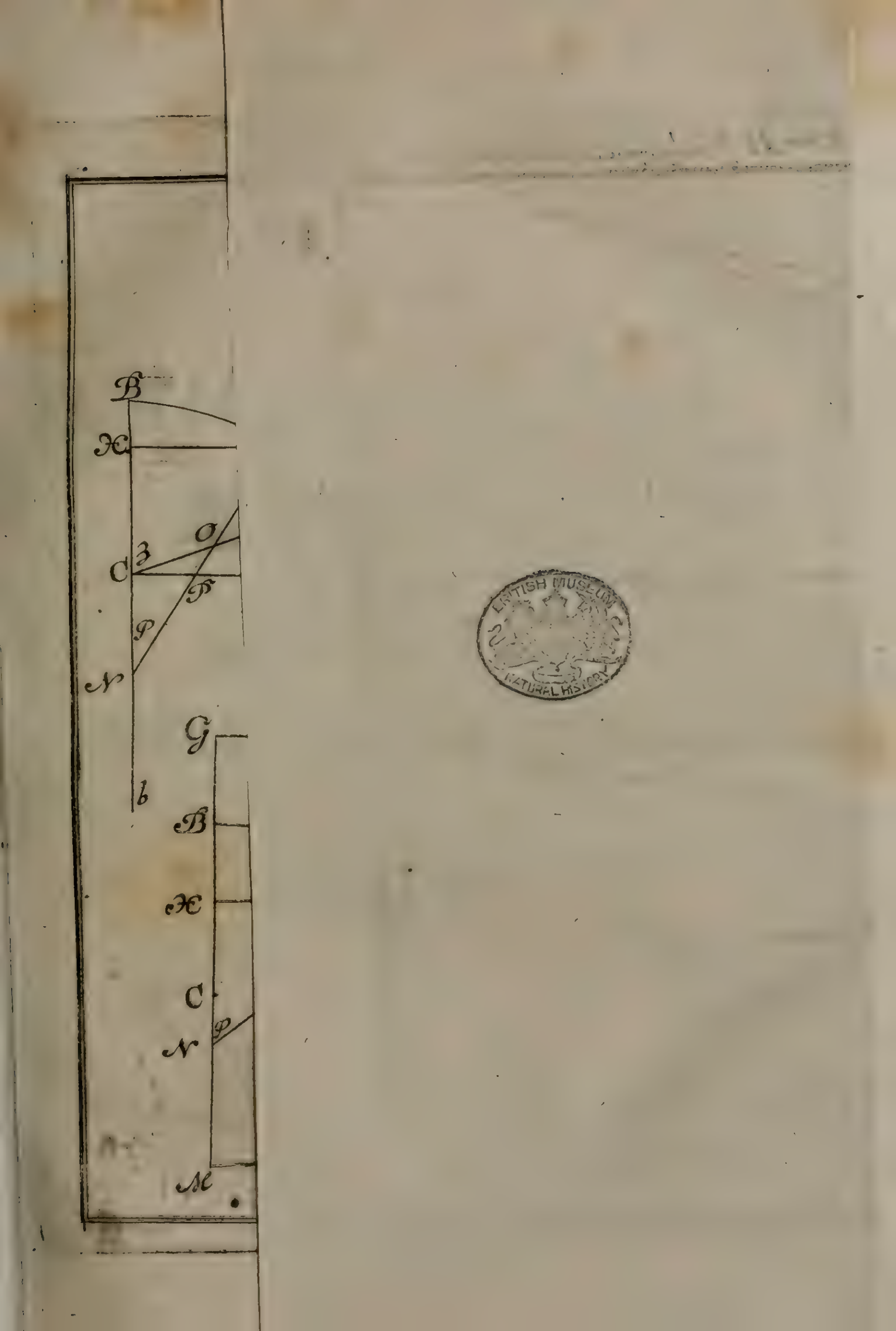
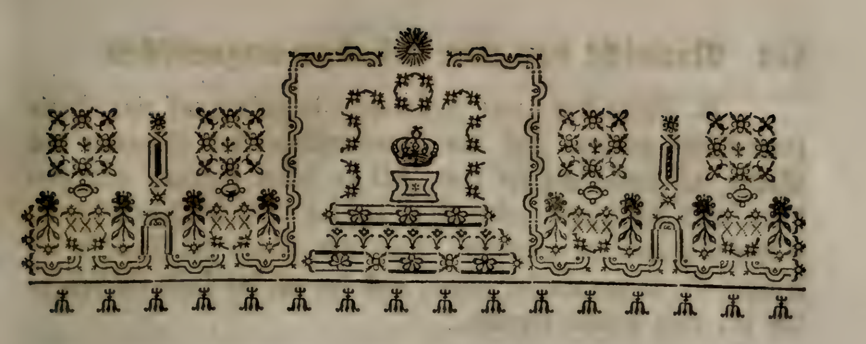

B
H
O
C
P
P
N
b
G
B
H
C
P
N
M
BRITISH MUSEUM NATURAL HISTORY

Fig. 1.

Fig. 2.

J. Albrecht Eulers
Nachricht
von einer
besondern magnetischen
Sonnenuhr.



Die Sonnenuhr, von welcher ich hiermit der erlauchten Akademie der Wissenschaften eine Nachricht und Beschreibung mitzutheilen die Ehre habe, ist mir bey Gelegenheit eines hier durchreisenden Herrn gezeiget, und von dem geschickten Künstler Herrn Stegmann in Cassel verfertiget worden.

Dieses Instrument wird in der ersten Figur vorgestellt, wo KLMN die Büchse ist, in welcher sich die Magnetnadel POQ befindet, die, wenn das Instrument recht gestellet worden, auf der darinn gezeichneten Stundenlinie FEG die Stunde des Tages anzeiget.

Um das Instrument aber richtig zu stellen, muß folgendes beobachtet werden.

I. Befindet sich auf der Mittagslinie EC die auf einer Regel bis in A verlängert ist, an dem äußersten Ende A ein aufrechtstehender Steft AB und zugleich eine im Horizonte bewegliche Regel AD, mit einer darauf gezogenen graden Linie AD, welche gegen den aus A beschriebenen und in seine Grade eingetheilten Zirkelbogen so gestellt werden muß, daß der Winkel CAD der Abweichung der Magnetnadel gleich werde.

II. Wird das ganze Instrument dergestalt auf eine Horizontalfläche gestellt, daß bey Sonnenschein der Schatten des Stefts AB genau auf die Linie AD zu fallen komme, und alsdann wird die Magnetnadel QOP auf der Stundenlinie FEG die wahre Tagesstunde anzeigen; wenn nur vorher der Steft in O, worauf die Magnetnadel ruhet, und der auf der Linie CE beweglich ist, recht gestellt worden.

III. Es befindet sich nämlich auf der Linie CE eine Rinne TV, in welcher der Steft O hin und wieder geschoben werden kann, wobey die Monate bemerket sind, nach welcher der Steft O jederzeit gestellt werden muß, daher es dann geschieht, daß zu verschiedenen Jahrszeiten die Magnetnadel QOP mit ihrem nördlichen Ende P bald über die Stundenlinie FEG herausgehet, bald kaum dahin reichet. Es ist auch für sich klar, daß dieses Instrument jederzeit genau horizontal gestellt werden muß, da denn der Steft AB senkrecht zu stehen kommt.

IV. Endlich ist auch nicht zu vergessen, daß diese Sonnenuhr nur auf eine gewisse Polhöhe eingerichtet ist, und nicht zugleich für verschiedene gelten kann. Diejenige, so ich gesehen, ist nur für die Polhöhe von Königsberg in Preußen gemacht; die in der ersten Figur hingegen abgezeichnete Sonnenuhre für die Polhöhe von 52° 30′ eingerichtet worden.

So eingeschränkt aber auch der Gebrauch dieser Sonnenuhr ist, so verdienen doch die Umstände, die bey Verfertigung derselben in Acht genommen werden müssen, in Betrachtung gezogen zu werden, welches aus folgenden Anmerkungen deutlicher erhellen wird.

1. Da diese Uhr des Mittags XII Uhr anzeiget, und also die Magnetnadel QOP auf der Linie OE stehen muß, indem der Schat-

Schatten des Stefts AB auf die Linie AD fällt, so ist AD alsdann die wahre Mittagslinie, woraus erhellt, daß die grade Linie ACE, worauf die Magnetnadel zu liegen kommt, von der Mittagslinie just um die Declination der Magnetnadel abweichen müsse. Wenn dahero die Linie von Süden gegen Norden gestellt wird, so muß der Winkel CAD der Abweichung der Magnetnadel gleich seyn. Da nun hier zu Land diese Abweichung ohngefähr 15 Grad gegen Westen beträgt, so muß der Winkel CAD von 15 Graden seyn, und um so viel Grade muß die Regel AD von der Linie AC von Norden gegen Osten gestellt werden, zu welchem Ende der aus dem Mittelpunct A beschriebene Zirkelbogen RCS in seine Grade eingetheilt ist. Auf dem Instrument, so ich gesehen, geht diese Eintheilung nur auf einer Seite von C gegen S Ostwärts, wann nämlich AC gegen Norden gekehret wird; ohne Zweifel weil östliche Declinationen hier zu Land nirgend Statt finden.

2. Hieraus ergiebt sich nun der Grund, warum besagter massen die bewegliche Regel AD genau nach der Declination der Magnetnadel gestellt werden muß, so lange sich die magnetische Abweichung nicht merklich verändert; damit aber auch alsdann, sowohl Vor- als Nachmittags die Magnetnadel auf der Stundenlinie die wahre Zeit anzeige, wenn das Instrument so gestellt wird, daß der Schatten des Stefts AB auf die Linie AD fällt, so muß nicht nur für eine jegliche Declination der Sonne der Steft der Magnetnadel O in der Rinne TV besonders gestellt, sondern die Stundenlinie FEG auch nach einem gewissen Gesetz gezogen und abgetheilet werden, als worauf der Hauptgrund der ganzen Einrichtung dieses Instruments beruhet; wie ich im Folgenden deutlich lehren werde.

3. Da die Magnetnadel des Mittags auf die Linie OE zu stehen kömmt, so ist klar, daß wenn dieselbe Nachmittags in die

Stellung QOP kommt, wo sie die Stunde richtig anzeigen soll, alsdann der Winkel EOP dem Azimuth der Sonnen gleich seyn müsse, dergestallt, daß alsdann die Nachmittagsstunden von E gegen Westen, die Vormittagsstunden aber gegen Osten zu stehen kommen; und also die Ordnung der Stunden verkehret werden muß, als sonsten auf den gewöhnlichen Horizontalsonnenuhren zu geschehen pfleget.

4. Um nun zu finden, wie diese richtige Anzeigung der Stunden erhalten werden könne, so müssen wir unsere Betrachtung auf die Bewegung der Sonne richten. Es sey demnach (2 Fig.) Z das Zenith des gegebenen Orts, für welchen die Sonnenuhr verfertiget werden soll, HZR der Mittagskreis, in demselben das Punct P der Pol und HR der Horizont; man nenne die Polhöhe PR$=p$; so ist der Bogen PZ$=90^\circ-p$. Nun seyen seit Mittag n Stunden verflossen, und man ziehe den Bogen PS, so daß der Winkel ZPS 15mal n Graden bekomme, welcher der Stundenwinkel genannt wird. Man setze diesen Winkel ZPS$=s$ also daß $s=15n^\circ$. Man nehme den Bogen PS von 90 Graden, so würde S der Ort der Sonne seyn, wann dieselbe keine Declination hätte. Gegenwärtig aber sey die Declination der Sonne $=q$ gegen Norden; und nachdem man den Bogen SP verlängert und S$\odot=q$ genommen, so wird jetzo das Punct $\odot$ den Ort der Sonne anzeigen. Dahin ziehe man den Verticalkreis Z$\odot$, so wird der Winkel HZ$\odot$ das gegenwärtige Azimuth der Sonne geben, welchem folglich in unserm Instrument der Winkel EOP (1 Figur.) gleich seyn muß, wenn nämlich daselbst das Punct P die n Stunde Nachmittags anzeigen soll.

5. Wir wollen nun erstlich den Fall betrachten, da die Sonne keine Declination hat, und sich also in S befindet: alsdann soll (3 Fig.) O der Ort des Stefts der Magnetnadel seyn,

wel-

welche nun die angezeigte n Stunde Nachmittags durch ihre Lage ON in dem Punct N der Stundenlinie EN andeuten muß, so daß der Winkel EON dem Winkel HZS (2 Figur) gleich wird. Man nenne demnach die Weite EO $= a$ (3 Fig.) und die Linie ON $= z$, welche zugleich mit dem Winkel EON $=$ HZS die Natur der Stundenlinie EN ausdrücken wird. Laßt uns nun ferner setzen, daß für die gegebene Declination der Sonne S⊙ $= q$, der Steft der Magnetnadel in o gerücket werden müsse, und setze die Weite O$o = v$; so muß für eben dieselbe n Stunde der Winkel EoN dem Winkel HZ⊙ gleich werden; dergestallt, daß der Winkel ONo (3 Fig.) dem Winkel SZ⊙ (2 Fig.) gleich wird. Daher man diese Verhältniß bekommt $\sin ON o : O o = \sin E o N : ON$, das ist $\sin SZ\odot : v = \sin PZ\odot : Z$.

6. Nun aber ist in dem sphärischen Dreyeck PZS die Seite PS $= 90°$ die Seite BZ $= 90° - p$ und der Winkel ZPS $= s = 15n°$; daraus erhält man

$$\text{tang}\, HZS = \frac{\sin s}{\sin p.\, \cos s} = \text{tang}\, EON.$$

Wenn man also den Winkel EON $=$ HZS $= \phi$ setzt, so wird $\text{tang}\,\phi = \frac{\text{tang}\, s}{\sin p}$; ferner da $\sin SZ\odot : \sin PZ\odot = \frac{\sin S\odot}{\sin ZS} : \frac{\sin P\odot}{\sin PZ}$

das ist $\sin SZ\odot : \sin PZ\odot = \sin q.\, \cos p : \cos q.\, \sin ZS$

und $\sin ZS : \sin s = 1 : \sin\phi$

so wird $\sin SZ\odot : \sin PZ\odot = \sin q.\, \cos p : \frac{\cos q.\, \sin s}{\sin\phi}$

Folglich weil $\sin SZ\odot : \sin PZ\odot = v : z$

so erhält man $v : z = \text{tang}\, q : \frac{\sin s}{\cos p.\, \sin\phi}$.

7. Hier ist nun dieses hauptsächlich in Erwegung zu ziehen, daß die Weiten O$o = v$ einig und allein von der Declination der Sonne q abhängen, dagegen aber die Linien ON $= z$ davon unabhängig seyn müssen. Dahero setze ich $v = C\, \text{tang}\, q$, und dann

wird $z = \frac{C\sin s}{\cos p . \sin\phi}$. Um nun die beständige Größe C zu bestimmen, so ist zu merken, daß wenn der Stundenwinkel $s = o$, die Linie $ON = z$ der Linie $OE = a$ gleich werden müsse. In diesem Fall aber wird auch $\phi = o$, und also $\tang\phi = \sin\phi = \frac{\tang s}{\sin p} = \frac{\sin s}{\sin p}$; dahero bekömmt man für diesen Fall $z = \frac{C\sin s . \sin p}{\cos p . \sin s} = C\tang p = a$: also daß $C = \frac{a}{\tang p}$ und folglich $v = \frac{a\tang q}{\tang p}$ und $z = \frac{a\sin s}{\sin p . \sin\phi}$. Da nun die Polhöhe p in diesen beyden Ausdrücken vorkommt, so ist klar, daß ein solches Instrument nur für eine gewisse Polhöhe eingerichtet werden kann.

8. Der erstere dieser Ausdrücke $Oo = v = \frac{a\tang q}{\tang p}$ giebt nun zu erkennen, wie für eine jede Declination der Sonne der Steft der Magnetnadel gerücket werden muß.

Der andere aber $ON = z = \frac{a\sin s}{\sin p . \sin\phi}$ zeiget uns die wahre Figur der Stundenlinie EN nebst ihrer Eintheilung.

Man lasse zu diesem Ende aus N auf OE die Perpendiculärlinie NX herunter fallen, und setze $OX = x$ und $XN = y$, so wird $x = z\cos\phi = \frac{a\sin s}{\sin p . \tang\phi}$ oder weil $\tang\phi = \frac{\tang s}{\sin p}$; $x = a\cos s$ und $y = z\sin\phi$ das ist — — — — — — $y = \frac{a\sin s}{\sin p}$.

Man beschreibe also aus dem Mittelpuncte O mit dem Halbmesser $OE = a$ die Zirkellinie EVK, und nehme darinn den Stundenwinkel $EOV = s$; so wird offenbar $OX = a\cos s$ und da $XV = a\sin s$, so wird $XN = y = \frac{XV}{\sin p}$: oder $XV : XN = \sin p : 1$ also daß die Stundenlinie EN eine Ellipsis seyn muß.

9. Für

9. Für diese Ellipsis deren halbe Axe OE wir a genennet haben, ist also der halbe Durchmesser $= \frac{a}{\sin p}$

der Parameter $= 2a \sin p$ und

die halbe Entfernung der beyden Brennpuncten von einander, oder die Entfernung eines jeden Brennpuncts von dem Mittelpunct O $= \frac{a}{\tan g p}$.

Wo p die Polhöhe desjenigen Orts andeutet, für welchen die magnetische Sonnenuhr verfertiget werden soll.

10. Die Verfertigung einer dergleichen magnetischen Sonnenuhre ist folglich nunmehro keiner Schwierigkeit mehr unterworfen.

Man ziehe durch die Mitte der Kapsel KLNM (1 Fig.) die grade Linie CE, und nehme auf derselben eine Entfernung OE an, welche etwa ein Drittel der Kapsellänge KL betragen kann; so wie die Figur es auszeiget. Durch O ziehe man die grade Linie VI. VI auf EC senkrecht, und beschreibe aus dem Mittelpunct O mit dem Halbmesser OE die halbe Zirkellinie CEC. Man theile diesen halben Kreis in 12 gleiche Theile, und ziehe die graden Linien 5, 7; 4, 8; 3, 9; 2, 10; und 1, 11.

Man reiße das rechtwinklichte Dreyeck eof auf, dessen ein Winkel ofe der gegebenen Polhöhe und die diesem Winkel gegenüberstehende Seite eo der erstbemeldten Entfernung OE gleich ist. (4 Fig.) So wird die Seite $of = \frac{a}{\tan g p}$ seyn. Auf der graden Linie VI—VI (1 Fig.) trage man zu beyden Seiten von O die gleichen Entfernungen $Of = Of$ der Seite $of = \frac{a}{\tan g p}$ gleich hin; so werden f und f die beyden Brennpuncte der Ellipsis seyn, welche also, da sie durch das Punct E gehen soll, leicht beschrieben werden

den

den kann. Es sey FEG die beschriebene Ellipsis, welche also von den graden Linien 5—7; 4—8; 3—9 &c. in den Puncten V. IIII. III. II. I. XI. X. IX. VIII und VII. in ihre Stunden gehörig abgetheilet wird.

Was nun zweytens die Verfertigung der Rinne TV und ihre Eintheilung anbelangt, so ziehe man in dem ebenbemeldten rechtwinklichten Dreyeck *eof* (4 Fig.) durch die Ecke *f* die grade Linie TV auf *fo* senkrecht. Man trage ferner zu beyden Seiten der Seite *fo* die verschiedenen Declinationen der Sonne auf: man mache nämlich den Winkel $TOf = 23\frac{1}{2}°$
den Winkel *tof* = der Declination der Sonne im Augustmonat
den Winkel *uof* = der Declination der Sonne im Septembermonat
den Winkel *fov* = der Declination der Sonne im Octobermonat
den Winkel *fow* = der Declination der Sonne im Novembermonat
den Winkel *fox* = der Declination der Sonne im Decembermonat
und wiederum den Winkel $foV = 23\frac{1}{2}°$.

So werden die Puncte *s*, *t*, *u*, *v*, *w*, *x* der graden Linie TV die Oerter anzeigen, wo der Stift der Magnetnadel zu jeder Jahrszeit hingerückt werden muß; die Linie TV aber selbsten wird die Länge der ganzen Rinne geben, welche man derohalben sammt ihrer Eintheilung auf dem Instrument dergestallt tragen muß, daß das Punct *f* genau auf dem Mittelpunct *o* zu stehen kommt.

Endlich muß die Länge der Magnetnadel so beschaffen seyn, daß dieselbe die Stundenlinie FEG zu allen Jahrszeiten zum wenigsten erreichet, oder ihre Länge muß der Entfernung V—IIII gleich seyn.

Versuch

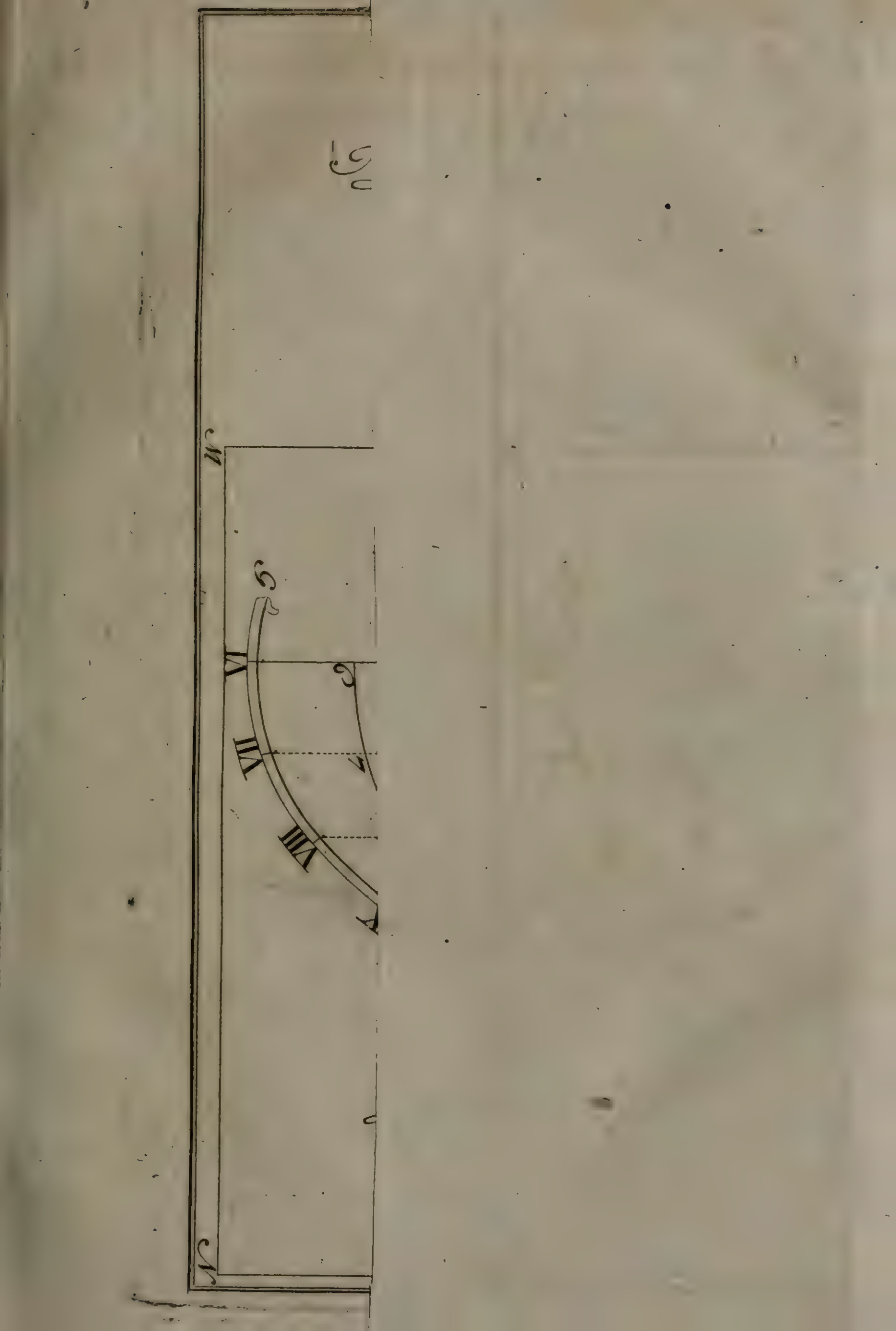
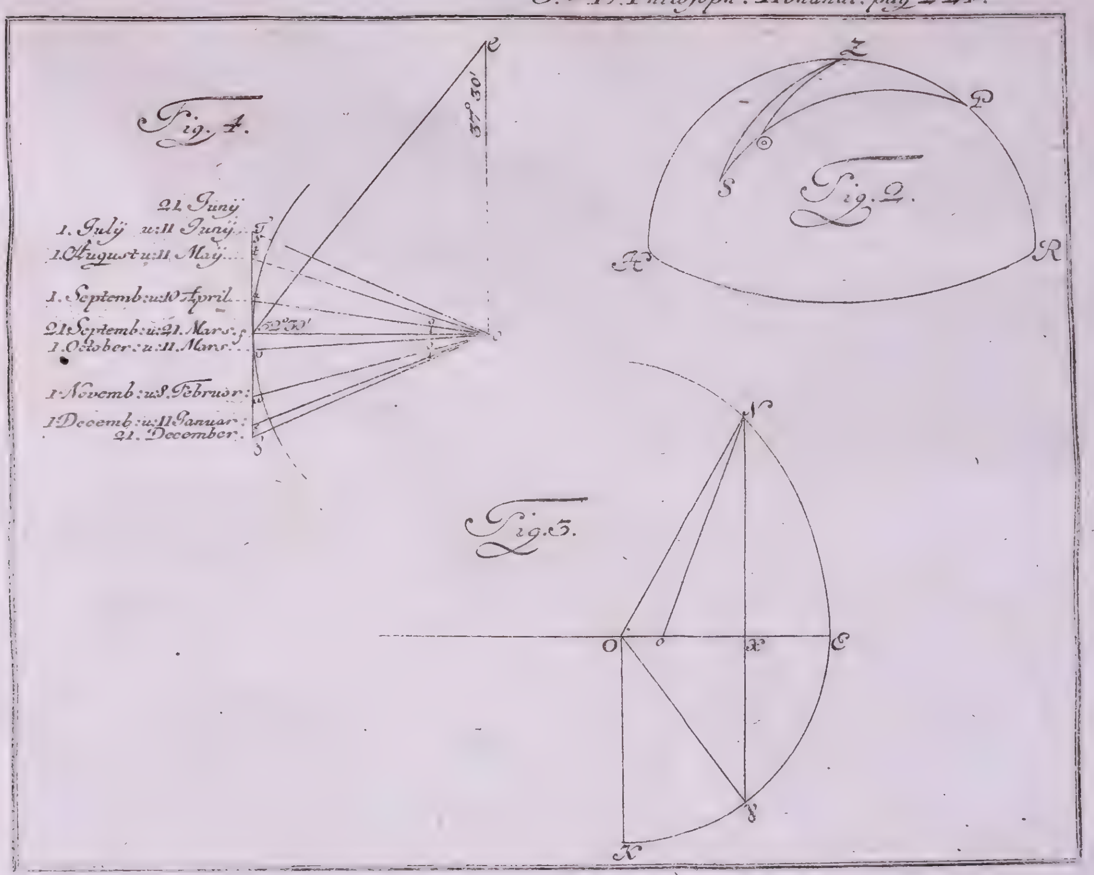


Fig. 1.

21 Decemb.
Decem. Januar
Novem. Februa
Octob. Märs
21. S. 21. Ms.
Septer. April
August May
Julius Junius
21 Junii
VI VII VIII IX X XI XII I II III IIII V VI
Pohl Höhe .... 52° 30'

1. Ju
1. Aug.
1. Septe
21. Septe
1. Octob.
1. Noven
1. Decen


Fig. 4.
21. Junÿ
1. Julÿ u: 11 Junÿ
1. August u: 11 Maÿ
1. Septemb: u: 10 April
21. Septemb: u: 21. Mars
1. October: u: 11. Mars
1. Novemb: u: 8. Februar
1. Decemb: u: 11 Januar
21. December
52° 30'
37° 30'
Fig. 2.
Z
P
S
R
Fig. 3.
N
O
E
K

Versuch
einer
Abhandlung
von
Scheidung und Aufbereitung
geringhaltiger Aerze bey Bergwerken

aufgesetzt
von
Karl August Scheidt
den 4 Julii 1765.



Von der Nothwendigkeit und dem Nutzen, geringhaltige Aerze zu scheiden und aufzubereiten.

Geringhaltige, oder an Metal arme Aerze sind bey Bergwerken eine bekannte Sache, und welcher Gewerke, oder Bergmann sollte sie nicht kennen? da sie bey Bergwerken allemal in größerer Menge, als an Gehalte reichere und derbere Aerze vorfallen. Wenn der Bergmann nur diese nehmen, und jene verachten wollte, würde er niemals, oder zum wenigsten sehr schwer bey seinem Baue fortkommen, er würde eher aus dem Felde gehen müssen, als er Anfangs vermuthet hätte. Nein! die Bergleute sind zu gute Wirthe, als daß sie das Geringe verachten sollten; die es nicht sind, sollten es doch seyn; denn gute Wirthschaft auch in diesen Dingen bringt Nutzen.

Man trachtet zwar bey dem Bergbaue meistentheils nach reichen Aerzen: sie fallen besser in die Augen, und füllen den Beutel geschwinder; allein das edelste im Reiche der Natur, nach menschlichen Begriffen und Meynungen, ist immer seltener, als das unedlere und geringere; beydes ist immer in natürlichen Körpern

 pern

pern miteinander verbunden. Reiche und geringe Aerze sind öfters so miteinander vereiniget, daß keine Gränze zwischen ihnen angegeben werden kann; das sonst geübte Auge eines Aerzscheiders muß sie aufs höchste nur nach einem Ungefähr bemerken, und mit dem Scheidehammer in der Hand bestimmen.

Wir müssen also denen Bergleuten die Freyheit lassen, daß wenn die reichen Aerze gewonnen werden sollen, sie auch die ärmern zugleich mit bearbeiten mögen, und der letztern wegen weder Schlägel noch Eisen schonen dürfen. Wer Bergmann genug ist, und Aerzstuffen kennet, wird niemals diesen Wahrheiten widersprechen, so sich auf den Augenschein und Erfahrung gründen. Aus dem angeführten ist also klar, daß die geringen Aerze gewonnen werden müssen, wenn wir die reichen haben wollen. Sind die reichen Aerze seltener, als die geringen, und muß man diese mit jenen bearbeiten und gewinnen, so wird von den Gewinnerkosten einem so viel als dem andern anzurechnen seyn, und das eine zum Schmelzfeuer so viel Recht als das andere haben, nur mit dem einzigen Unterschiede, daß die reichen wegen ihrer Reinigkeit den Rang mit Recht von denen geringern behaupten, die geringen aber erst gereiniget werden müssen, ehe sie dem Feuer mit Nutzen übergeben werden können. Ein reiches Aerz aber ist dasjenige, an welchen wenig oder gar kein Berg und Gestein zu finden ist, ein armes Aerz aber wird das genennet, das nur körnigt und öfters sehr zart in viel Berg und Gesteine eingesprengt ist, oder deutlicher zu reden: eine reiche Aerzstuffe ist die, so aus viel Aerz und wenig oder gar keinem Gebürge oder Gestein bestehet; eine arme aber, so mit viel Gebürge oder Gestein und wenig Aerz gemischt ist; da nun Aerz, das mit viel strengen Gebürge und Gestein gemischt ist, im Schmelzen nicht so geschwind und leichte zu fließen pfleget, als reiches und derbes, sondern eine

dicke

dicke nußige Schlacke giebt, welche den wahren Gehalt der Aerze niemals völlig aus sich im Feuer nieder fallen lässet; so leuchtet die Nothwendigkeit der Scheidung oder Auf- und Vorbereitung der armen Aerze Jedermann deutlich in die Augen.

Ist diese Auf- oder Vorbereitung nöthig, so muß die beste Art derselben, so viel möglich, aufgesucht werden.

Wir finden bey Bergwerken zwey Hauptvorbereitungen, Reinigungen, oder Scheidungen der Aerze von Berg und Gestein, ehe sie im Feuer mit Nutzen zu gute gemacht werden; die eine geschiehet mit dem Poch- und Scheidehammer in der Hand, damit das geringe Aerz von dem reichen abzusöndern; die andere durch Poch- und Waschwerke vermittelst zu geschlagenen Wassers; bey jener kommt es auf die Känntniß der derben reichen und geringen Aerze an, welche ein geübter Scheidepursche zu unterscheiden wissen muß. Ich finde hiebey weiter nichts zu erinnern, als daß diejenigen, so mit dem Scheiden der Aerze zu thun haben, aufmerksam genug seyn, und nichts, was derb und rein, unter die geringen Aerze werfen sollen, mit welchen es sonst durch die Pochwerke und Wäschen gehen müßte; in dem ersten, würde es, weil es insgemein mürber, als das geringe ist, bergmännisch zu reden, zu todte gepocht werden, und auf denen Waschherdten würde es in dem Herdtwasser aufsteigen, fortschwimmen, und nichts zu erhalten seyn; die Arbeit würde nur dadurch ohne Noth vermehret werden, viel gutes reiches Aerz verloren gehen, und der Schaden für die Gewerkschaft sich verdoppeln.

Bey der Aufbereitung der geringen Aerze durch Poch- und Waschwerke ist die Sache weit wichtiger, und verdienet genauer im Folgenden betrachtet zu werden.

Von den zu Aufbereitung der geringen Aerze gehörigen Pochwerken.

Weil das Aerz öfters nur klar körnigt und zart in Berg und Gesteine eingesprengt lieget, kann es mit dem Hammer nicht geschieden werden; es sind daher die Alten schon auf die Scheidung solcher Aerze durch Poch- und Waschwerke gefallen, wovon sonderlich Agricola de Re metallica verschiedenes aufgezeichnet, welchen Löhneis, Rößler und die neuern Schriftsteller gefolget sind.

Pochwerke sind Maschinen, die aus etlichen langen büchenen viereckigten senkrecht zwischen Säulen, Querhölzern und Riegeln, so Laden genennet werden, stehenden, und unten mit ¾ Centner schweren Eisen versehenen Hölzern oder Stempeln bestehen, in welchen Däumlinge oder hölzerne Arme sind, die vermittelst einer mit Hebeköpfen versehenen Welle eines Wasserrades gehoben werden, und hernach durch ihren Zurückfall die mit Aerz eingesprengten Berge oder Gestein in einen unter ihnen befindlichen, von hölzernen Bohlen gemachten Kumpfe, oder Kasten zerstossen und klar pochen, welches zerstossene und klar gemachte Gestein oder Berg der eine zu nächst der einen Säule befindliche Stempel mit dem in den Kumpf geschlagenen Wasser durch ein in dieselbe Säule gemachtes Loch, in dem er nach seinen geschehenen Hube zurück fället, heraus in ein hölzernes Gerinne quetschet, oder sich bergmännisch auszudrücken, das mit Pochhaufwerk vermischte Wasser in die daran liegenden Gerinne oder Pochgräben austrägt. Dieser sonst so nützlichen Maschine Hauptfehler ist die gar zu große Reibung ihrer Theile; diesem Fehler einzusehen, ehe auf dessen Verbesserung gedacht werden kann, muß ich die Zeichnung eines bey Bergwerken gebräuchlichen dreystempeligten Pochwerks Fig. 1. liefern, wo

A. Das

A. Das Wasserrad ist

B. Die Welle des Rades

C. Die Hebeköpfe

D. Ein Däumling oder Arm des Stempels.

E. Die Stempel.

F. Die Laden, zwischen welchen die Stempel aufgehoben werden, und wieder niederfallen.

G. Die Riegel, so die Laden zusammen halten.

H. Die Säulen

I. Der Kumpf- oder Pochkasten

K. Das Austrageloch.

Ich will nunmehr den Fehler dieser Maschine aufsuchen, und deutlich vor Augen legen.

Wenn das Rad A. mit seiner Welle B. durch aufgeschlagenes Wasser in Bewegung gesetzt wird, greifen die Hebeköpfe C. nach einander an die Däumlinge D. derer Stempel E. Hier gehet schon bey dem Hube jeden Stempels zwischen dem Hebekopfe und Däumlinge, da jener sowohl, als dieser bey 6 Zoll breit ist, eine starke Reibung vor, indem über 2½ Centner Last, so ein dergleichen Pochstempel mit seinem Eisen hat, gehoben werden muß; der Hebekopf, in dem er mit der Welle umgedrehet wird, und den Däumling des Stempels fasset, ziehet ihn mit dem Stempel nach sich zu, wodurch der Stempel mit Gewalt, sowohl an das eine unterste Ladenholz bey *a*, als das andere oberste bey *b*, angedrückt wird, und sich daselbst bey jedem Hube abermal und zu gleicher Zeit reibet, so, daß das Rad viel Kraft anwenden muß, diese dreyfache Reibung und Widerstand zugleich mit der Last eines einzigen Stempels zu überwinden; da nun bey einem 6 stempligten Pochgezeuge, dergleichen man insgemein an einer Welle antrift, allezeit 4 Stempel zugleich gehoben werden, oder

ihre

ihre Last vermittelst der Däumlinge auf denen Hebeköpfen der Radewelle hänget; so ist leicht zu erachten, daß der Widerstand der Reibung sehr beträchtlich bey dieser Maschine ist, welchen zu überwinden, entweder viel Wasser auf das Rad nöthig ist, oder wo dieses, sonderlich in denen Gebürgen bey trockener Witterung fehlet, das Pochgezeug stille stehen muß, wodurch die Zeit verloren gehet, die Aerze nicht gepochet, noch aufbereitet, viel weniger hernach zum Schaden derer Gewerken zu gute gemacht werden können.

Dieses ist es, was mich bewogen, auf ein Mittel zu denken, wodurch diesem großen Fehler gedachter Maschine abgeholfen werden möchte.

Der ehmalige Professor der Naturlehre Doctor Lehmann in Leipzig hat schon diese Maschine seiner Betrachtung werth gehalten, und sie durch angebrachte mittelbare Hebel zu verbessern gesucht, dadurch etwas Kraft zu ersparen; allein der Hauptfehler, die Reibung, ist dadurch fast mehr vermehret, als vermindert worden, daher auch seine Erfindung nirgends, meines Wissens, bey Pochwerken angebracht ist; man hat sich bisher lieber mit der alten Weise beholfen. Dieser Gelehrte hat unter dem Titel: Vollkommene Beschreibung einiger neuen Puchwerke rc. seine Erfindung Anno 1716. in 4to zu Leipzig durch den Druck bekannt gemacht, welche hernach Anno 1749. mit beygefügter Zeichnung wieder aufgeleget worden.

Ich will es wagen, und hier einen neuen Vorschlag thun, zu sehen, ob ich glücklicher seyn werde, diesen Fehler der Pochwerke, nämlich ihre große Reibung, wenigstens zum Theil wegzuschaffen. Es ist nöthig, mein hiezu ausgedachtes Mittel, durch eine Zeichnung so kurz, als möglich, und zwar nur mit einem

ein=

einzigen Stempel Fig. 2. vorzustellen; denn wie dieser vorgestellet ist, werden auch mehrere bey einem Pochwerke angebracht werden können.

A. Das Wasserrad.

B. Die Welle.

C. Der Hebekopf.

L. Der unterste Hebel.

M. Die dännene Stange mit Ketten oder Seilen.

N. Der oberste Hebel.

O. Die Kette oder Seil, wodurch der oberste Hebel mit dem Stempel verbunden ist.

F. Die Ladenhölzer.

P. Die Schwelle, auf welcher der unterste Hebel mit dem einen Arme liegt.

Das übrige alles außer dem Däumlinge, welcher wegfällt, ist wie bey der 1 Fig.

Es ist aus denen Gesetzen der Bewegung bekannt, daß wenn die Kraft nach einem rechten Winkel wirket, solche, einen Körper zu bewegen, mehr ausrichtet, als wenn ihre Wirkung nach einem spitzigen oder stumpfigen Winkel geschiehet.

Hier bey meiner Erfindung in der 2 Figur geschiehet die Bewegung bey 1. 2. 3. vermöge der Bogenstücke der Hebel nach rechten Winkeln, und der Stempel wird weder bey seinem Hube, noch bey seinem Falle an die Laden gedrückt, folglich fällt das Reiben der Stempel zwischen denselben weg: der oberste Hebel N liegt im Gleichgewichte, und die Reibung in seinem Ruhepuncte ist sehr geringe. Der unterste Hebel L bestehet auch aus zwey gleich langen Armen; der Arm aber ohne Bogenstücke, welchen der Hebekopf fasset, muß so gemacht werden, daß er etwas schwerer als der andere ist, damit wenn ihn der Hebekopf fahren läs-

set, er sich in seine vorige Stellung zum folgenden Hube senke, und der Stempel hiezu bey seinem Falle keine Kraft anwenden dürfe.

Durch diese Einrichtung der Hebel wird der Hub der Stempellast erleichtert, und der Stempel wird in seinem Falle nirgends gehindert; denn der oberste Hebel liegt im Gleichgewichte, und der unterste begiebt sich wegen der mehrern Schwere des Armes, welchen der Hebekopf fasset, in seine vorige Stellung. Die wenige Schwere der dännenen Stange mit beyden kurzen Ketten, oder guten hänfenen Seilen, so von dem fallenden Stempel gehoben werden muß, hindert die Kraft des fallenden Stempels, der mit seinem Eisenwerk über 2½ Centner hat, wenig, so daß dieser Umstand fast keiner Betrachtung werth ist, indem die Stange mit beyden Ketten kaum 6 bis 8 Pfund betragen kann. Was ist dieses gegen dem Fall einer Last von mehr als 2½ Centner. Der Stempel wird also leichter von dem Hebekopfe gehoben, dahero auch die Reibung des einen Armes des untersten Hebels an den Hebekopfe geringer ist, als die zwischen dem Hebekopfe C. und Däumlinge D. in der ersten Fig. Die Reibung der Hebel in ihren Ruhepuncten, oder Zapfen, gegen die Reibung des Stempels zwischen den Laden nach der alten Art ist ebenfalls fast vor nichts zu achten.

Diese heftige Reibung des Stempels zwischen denen Laden nach der 1 Fig. fället bey meiner Art nach der 2 Figur, wo er senkrecht gehoben wird, demnach weg, wodurch vieles Stempel-Laden- und Riegelholz das durch die starke Reibung bey der alten Art sich abnutzet, ersparet wird.

Die Spannung des obersten und untersten Hebels mit einer leichten dännenen Stange wird nach dem Aufstehen des Stempels

pels auf der Pochsohle in dem Kumpfe gerichtet; die Höhe des erforderlichen Hubes des Stempels aber muß die Einrichtung der Länge des Hebekopfes und der Arme der Hebel geben, welche willkührlich ist, und Jedermann leicht nach seinem Gefallen machen kann.

Der eine schwerere Arm des untersten Hebels nach der 2 Fig. liegt auf einer Schwelle P, welche nicht zuläßet, daß er tiefer sinken, und der Hebekopf ihn nicht fassen könnte; wodurch auch zugleich das Einpochen des Stempels in die Pochsohle, wenn nicht allemal Stufwerk genug unter ihm liegt, vermieden wird; da es hingegen in diesem Falle bey der alten Art ohne Verwüstung und Zerbrechung des ganzen Pochgezeuges nicht leicht abgehet; bricht bey meiner Art ein Gelenk einer Kette, oder es bricht eine Stange, oder ein Hebel, so gehet der eine Theil der Maschine, nach der Radewelle zu, ohne Hinderniß in seiner Bewegung fort, und der andere, nach denen Stempeln zu, stehet, ohne daß etwas weiter zerbrechen kann, stille.

Wenn man beyde Maschinen Fig. 1. und 2. gegen einander berechnet, ohne auf ihre Reibung Bedacht zu nehmen, so ist das Facit zwar einerley, als

Es sey bey der 1 Fig. der halbe Durchmesser des Wasserrades 5 Fuß, der halbe Durchmesser der Welle mit der Länge des Hebekopfes außer ihr $1\frac{1}{2}$ Fuß lang, so wird sich die Kraft zur Last verhalten wie $1\frac{1}{2}$ zu 5, wenn nun die Last des Stempels mit dem Pocheisen 250 Pf. ist, so werden 75 Pf. Kraft diese Last in der Gleichwage erhalten; denn:

$$5 : 1\tfrac{1}{2} = 250 : X$$

$$X = \frac{1\frac{1}{2} \times 250}{5} = \frac{375}{5} = 75 \text{ Pf.}$$

Bey der 2 Figur sey der halbe Durchmesser des Wasserrades auch 5 Fuß, der eine Arm des untersten Hebels 1 Fuß, der eine Arm des obersten Hebels 1 Fuß; der halbe Durchmesser der Welle mit dem Hebekopfe außer ihr $1\frac{1}{2}$ Fuß, der andere Arm des untersten Hebels 1 Fuß, der andere Arm des obersten Hebels 1 Fuß, so wird sich die Kraft zur Last verhalten, wie $1\frac{1}{2}$. zu 5., denn:

$$5 : 1\tfrac{1}{2} = 250 : X$$

$$X = \frac{1\frac{1}{2} \times 250}{5} = \frac{375}{5} = 75 \text{ Pf.}$$

Wenn man aber die Einrichtung und den Bau beyder Figuren mit ein wenig Aufmerksamkeit betrachtet, so werden die Vortheile der zweyten vor der 1 Figur in Ansehung der verminderten Reibung, der längern Erhaltung des Stempel- Laden- und andern Holzwerkes, wie auch der leichtern und geschwindern Bewegung deutlich in die Augen leuchten, und ich meinen Zweck: die Reibung dieser Maschine zu vermindern, erhalten haben.

Es findet sich zwar in Leupolds großen Maschinentheater im 1sten Theile in dem 16 Cap. eine Beschreibung, und auf der XXXI Tab. die Zeichnung einer Art, den Stempel senkrecht zu heben, und dadurch die allzugroße Reibung zu vermindern, allein der Stempel wird bey derselben eben so gut an die Laden gedrückt, als bey Fig. 1. Die Verfertigung der Heber nach einer Schneckenlinie würde denen gemeinen Zimmerlingen bey Bergwerken nicht überall so leichte beyzubringen seyn, die Rollen, so sich bey jeden Hube zu viel drehen müssen, würden bald wandelbar, die Radewelle zu sehr verlochet, und ihre haltbare Stärke dadurch geschwächet werden.

Bey der Stellung und Richtung dieser Maschine, ob sie das geringe Stufwerk grob, oder klar, oder nach der Bergsprache,

röshe,

rösche, oder zähe pochen soll, kommt es lediglich auf die in den Kumpf und auf das Rad zuschlagenden Wasser an; soll grob gepocht werden, so müssen viel Wasser auf das Rad und in den Kumpf geschlagen werden; soll klar gepocht werden, so schlägt man wenig Wasser auf das Rad und in den Kumpf.

Ob aber das geringe Stufwerk, so an manchen Bergorten auch Ausschläge genennet wird, grob oder klar gepochet werden müsse, wird aus der Größe der in das zu pochende Stufwerk eingesprengten Aerztheile, so man Schlich nennet, geurtheilet: sind die eingesprengten Aerztheile zart und klein, so muß klar oder zähe gepocht werden, liegen sie aber grob körnigt darinne, so wird das Stufwerk grob, oder rösche gepocht.

Alle Maschinen die ein Stoßen oder Reiben verrichten, verwandeln und zersetzen die zu zerstossenden oder zu zerreibenden Körper in fast unendlich ihrer Größe nach verschiedene Theile, so, daß ihre Auseinandersönderung oder Scheidung demjenigen sehr schwer, ja fast unmöglich fället, der sie unternehmen soll; man hat daher bereits darauf gedacht, diese Theile, so viel möglich, von einander zu söndern, und zu dem Ende gewisse Gerinne, so man Pochgräben nennet, mit einigen fußtiefen Gruben, oder sogenannten Sümpfen angelegt, wovon nunmehro im Folgenden gehandelt werden soll.

Von den Gerinnen oder Pochgräben, worinne sich das geringe Pochhaufwerk zu Boden setzet.

In gegenwärtigem Falle, da Stufwerk von Gestein und Gebürge gepochet werden soll, worinne Aerze klar und körnigt eingesprengt liegen, muß auf ein schickliches und gutes Mittel gedacht werden, wodurch die in dem ausgetragenen Pochhaufwerke

befindlichen, ihrer Größe nach so verschiedenen Theile, so viel möglich, auseinander gesöndert werden; bisher hat man dergleichen Pochhaufwerk in gewisse in die Erde eingegrabene Gerinne von dännenen Bohlen, so Pochgräben genennet werden, laufen lassen, in welchen sich erst das Grobe im Anfange solcher Gerinne, und hernach das immer Klärere und Klärere bis zu Ende derselben aus dem Wasser ab und zu Boden setzen sollen; man hat auch Abtheilungen in dergleichen Gerinnen gemacht, und so viel Sorten sich in Gedanken eingebildet, als willkührlich gemachte Abtheilungen in denen Gerinnen vorhanden gewesen; der vorgesetzte Zweck aber ist nicht recht erreichet worden, sondern es haben sich noch immer Theile in der ersten Abtheilung, so das Gefälle genennet wird, gefunden, die erst in der andern, dritten, oder folgenden hätten niedersinken sollen; überhaupt die Sortirung ist in diesen Gerinnen nicht hinlänglich geschehen, weil sie allemal zu enge und in keiner rechten Verhältniß zu der nöthigen Ausbreitung der mit Pochhaufwerk vermischten Wasser angeleget worden; hierauf aber kommt es an, wenn die Sortirung gut von statten gehen, und dadurch der folgenden Aerz- oder Schlichscheidung von Berg und Stein auf denen Waschherdten vorgearbeitet werden soll.

Nun sind in einem gepochten oder zerriebenen Haufwerke nicht allemal nur Theile von verschiedener Größe und Schwere von einerley Materie miteinander vermischt, sondern es finden sich auch vielmal Theile von ganz anderer Materie in eben demselben Haufwerke, die an Größe und Schwere sehr unterschieden sind; eben so ist das Pochhaufwerk bey Bergwerken beschaffen; will ich dieses ordentlich auseinander söndern, und denen Waschherdten vorarbeiten, so muß ich, so viel möglich, diejenigen Theile, so einander entweder an Größe oder an Schwere gleich sind, zusammen zu bringen suchen.

Man

Man hat bey Bergwerken, wo diese Absönderung der Aerze oder Schliche vom Berg und Gestein ein sehr wichtiger und nützlicher Gegenstand ist, auf vielerley Arten derselben gedacht, und bis jetzo keine bessere gefunden, als die, so durch Wasser geschiehet; sie ist auch in der That die natürlichste, wenn ich bedenke, daß selbst die Theile der verschiedenen Erd- und Steinlagen unseres Erdbodens durch Wasser geschieden, und auseinander gesöndert worden, und, wo sie sich hie und da mit Regen- und Fluthwasser zum Theil von neuem vermischen, solches, wenn das Wasser ruhiger wird, noch zu geschehen pfleget, wie die Erfahrung lehret.

Bis hieher bin ich mit denen Bergleuten einig; ob aber die bisher bey Pochwerken gebräuchlichen Pochgräben oder Gerinne so beschaffen und angeleget sind, daß damit der vorgesetzte Zweck einer geschickten Vorbereitung zu der darauf folgenden völligen Scheidung und Reinigung derer Schliche auf denen Waschherdten erlanget werden könne, daran habe ich Ursache zu zweifeln.

Es fallen zwar die aus dem Kumpfe des Pochwerkes ausgetragenen und mit Pochhaufwerk vermischten Wasser zuerst in das gleich unter dem Austrageloche liegende Stückegerinne, so das Gefälle genennet wird; die Pochwerksleute machen es kurz, damit sich nur die gröbern Pochwerkstheile des Pochhaufwerkes darinne setzen und sammeln, die leichtern in die daran liegenden andern Gerinne fortschwimmen, und sich in deren Abtheilungen nach Art ihrer Größe und Schwere aus dem Wasser absetzen sollen. Diese Vorrichtung thut auch etwas, und wenn man die wenigen Sorten Pochhaufwerk, so insgemein, wenn die Gerinne voll sind, zu weiterer Scheidung vor die Waschherdte ausgestochen werden, nicht genau besiehet und beurtheilet, so zeiget sich ein Unterschied zwischen diesen Sorten, so, daß das aus dem

Ge-

Gefälle ausgestochene Pochhaufwerk das gröbste und das andere in dem Gerinne abwärts folgende immer klärer und klärer aussiehet; allein man mache es mit diesen ausgestochenen Pochhaufwerksorten so, wie ich es versucht, lasse jede derselben besonders in ein rundes Faß mit Wasser einrühren, und wenn sich das Haufwerk zu Boden gesetzt, das Wasser abgegossen, und das Haufwerk in etwas trocken geworden, die Reiffen vom Fasse abschlagen, die Tauben gemach weg nehmen, so wird, wenn ein Schnitt mit einem langen Messer, oder mit einer eisernen Schaufel von oben nach unten zu durch den Kuchen, oder das sich gesetzte Haufwerk geschiehet, ganz deutlich erhellen, daß am Boden erst grobe hernach immer klärere und klärere Pochhaufwerkstheile nach der Ordnung ihrer Schwere und Größe bis an die Oberfläche des Haufwerks oder Kuchens in lauter horizontalen Flächen liegen, die in ihrer Gerinnabtheilung vorher alle untereinander gemischt waren, folglich mußte die Scheidung der Pochhaufwerkstheile in dem Stückegerinne, woher es genommen war, nicht, wie es der Endzweck erforderte, vorgegangen seyn. Die Pochwerksleute gestehen diese Wahrheit auch selbst dadurch ein, daß sie die aus denen Pochgerinnen mit eisernen Schaufeln ausgestochenen Sorten zum Theil wiederum durch kurze Gerinne, welche sie Schlemm- und Durchlaßgräben nennen, abermal mit Wasser schlemmen, durchlassen, und der folgenden Reinigung derselben auf denen Waschherdten dadurch vorarbeiten, daß sie das Haufwerk wieder theilen, und aus einer noch mehrere Sorten machen; allein sie richten damit fast eben so wenig, als mit den Pochgerinnen aus, und sind bey der folgenden Reinigung auf denen Waschherdten wenig gebessert, sonderlich wenn die Schlemmer und Durchlasser bey ihrer Arbeit nachläßig, oder unachtsam sind, und alles wieder untereinander laufen lassen, wie es vorher gewesen.

Die-

Dieser weitläuftigen Arbeit entübriget zu seyn, ist also nöthig, die Vorrichtung zur Scheidung des Pochhaufwerks gleich so zu machen, daß dessen Theile, sobald sie mit dem Wasser aus dem Kumpfe des Pochwerks zum Austrageloche heraus gequetschet werden, im Fortfließen besser voneinander gesöndert, und in so viele Sorten, als nur möglich seyn will, getheilet werden, deren meiste Theile zum wenigsten entweder an Größe, oder an Schwere einander fast gleich sind, so wird dergleichen also getheiltes Pochhaufwerk, ohne es erst wieder zu schlemmen und durchzulassen, sobald auf denen Waschherdten mit leichterer Mühe und Arbeit verwaschen, und die Aerzschliche vom Berg und Gesteine gereiniget werden können.

Es kömmt bey der Scheidung und Sortirung des Pochhaufwerks hauptsächlich auch darauf mit an, daß auf eine geschickte und leichte Art Aerz- und Bergtheile entweder von gleicher Schwere, aber ungleicher Größe, oder von gleicher Größe, aber ungleicher Schwere in ein Haufwerk zusammen gebracht werden; sind lauter Theile sowohl von Aerz als Berg von gleicher Schwere aber ungleicher Größe beysammen, so müssen die Bergtheile größer seyn, als die Aerztheile, denn Aerz ist ordentlicher Weise schwerer als Berg, ist dieses, so werden die Bergtheile dem von Herdte herabfließenden Wasser mehr Fläche entgegen stellen, woran das Wasser stösset, als die Aerztheile, folglich werden jene stärker vom Wasser gefasset, auf dem schiefliegenden Herdte von denen Aerztheilen herabrollen, und von ihnen, indem sie auf dem Herdte zurück bleiben, geschieden werden, welches bey dem Verwaschen auf denen Herdten die tägliche Erfahrung lehret.

Sind lauter Theile von Aerz und Berg von gleicher Größe, aber ungleicher Schwere beysammen, so werden die Aerztheile schwerer, als die Bergtheile seyn, und die Bergtheile werden als leich-

leichtere von dem Wasser vermittelst einer ihm mit einem breiten kurzen Besen von fichtenen Reißig gegebenen gelinden Bewegung gehoben und abgesöndert werden, so daß die Aerztheile allein zurück bleiben müssen. Man muß also auf Mittel denken, entweder lauter gleich schwere, oder lauter gleich große Aerz- und Bergtheile in ein Haufwerk zu bringen, wenn sie durch Wasser auf denen Waschherdten voneinander gesöndert, und die Aerztheile, oder Schliche von denen Bergtheilen gereiniget werden sollen; sind aber die Bergtheile mit denen Aerztheilen von einerley Größe und Schwere zugleich, wie man Beyspiele bey denen in Spath brechenden Aerzen hat, so muß vor diesen Fall auf ganz andere Mittel gedacht werden, wie sie vor dem Verwaschen auf denen Herdten auf einen der beyden ersten Fälle können gebracht werden.

Ich will Mittel nur für den ersten Fall suchen, da Theile von gleicher Schwere zusammen gebracht werden können; denn lauter gleich große Theile eines Haufwerks von andern ihrer Größe nach fast unendlich verschiedenen Theilen zu söndern, und sie in ein besonderes Haufwerk zu bringen, würde eine Arbeit seyn, mit der man niemals zu Ende kommen könnte, man möchte sie nun sieben, lesen, wurfeln, durchbeuteln, oder es mit ihnen machen, wie man wollte, so würde immer groß und klein untereinander bleiben; gleich schwere Theile aber lassen sich noch eher von andern leichtern durch flüßige Körper absöndern. Man weis, daß die flüßigen Körper so beschaffen sind, daß sich die festen durch sie hindurch bewegen können, und daß sie sich nach der ihnen eigenen Schwere aus jenem, wo sie vorher vermischt und beweget worden, zu Boden setzen.

Der flüßige Körper, das Wasser, ist, wie oben erwehnet worden, von langen Zeiten her zu Scheidung des Pochhaufwerks, niemals aber auf die beste Weise, gebraucht worden.

Man

Man hat wohl gesehen, daß feste Körper in dem Wasser schwimmen, und von ihm auf eine gewisse Weite, ehe sie aus ihm zu Boden sinken, mit fortgerissen werden; man ist auch gewahr worden, daß die gröbesten und schweresten zuerst und nach und nach die immer leichtern aus einem bewegten Wasser niedergesunken, weßwegen Pochgerinne mit Gefälle, Abtheilungen und Sümpfen angeleget worden; man ist aber damit von dem vorgesetzten Zwecke noch immer zu weit entfernet geblieben. Ich will suchen, demselben näher zu kommen, und eine neue Art der Sortirung des Pochhaufwerks, sobald es aus dem Pochwerkskumpfe durch den Austragestempel heraus gequetschet wird, angeben, wodurch denen Waschherdten ohne Schlem- und Durchlaßgräben vorgearbeitet, auch sogar das allzuviele Sumpf anlegen größten Theils entbehret werden kann.

Man weis, je weiter und breiter miteinander vermischte verschiedene Dinge auseinander gesetzt werden können, je leichter geschiehet ihre Auseinandersönderung, dieses zeiget sich bey flüßigen und festen Körpern, wenn sie miteinander vermischt und die letztern schwerer, als jene, sind. Eine Erfahrung soll die Sache klar machen:

Wenn man Wasser aus einem im Anfange engen hernach sich immer je mehr und mehr erweiternden Gerinne, das Wagerecht liegt, fortfließen lässet, so wird es sich nach der Gestalt der Fläche des Bodens in dem Gerinne mit denen in ihm eingemischten Dingen ausbreiten, denn alle flüßige Körper nehmen, wenn sie ruhig stehen, stäts eine mit dem Horizont parallele Lage an, wie selbst das Beyspiel aller Teiche und stehenden Wasser uns hievon genugsam unterrichtet; je weiter das Wasser sich ausbreiten kann, je eher setzen sich die mit ihm vermischten festen Körper zu Boden.

Dieses ist es, was mich auf den Einfall gebracht, dem Geschäfte der Natur nach zu gehen, und es auf die ausgetragenen mit Pochhaufwerk vermischten Wasser anzuwenden.

Ich dachte der Sache nach, und lies ein kleines Gerüste, so ich im Folgenden ein Stuffengerinne nennen werde, von dännenen Brettern zusammen setzen, es war 16 Fuß lang, und konnte nur 8 Stuffen bekommen, weil mir der Platz vor dem Austrageloche des Pochwerks, an welches ich es legen wollte, und das Gefälle zu mehrern Stuffen fehlete; oben waren die Seitenbretter des Stuffengerinnes, wo es an das Austrageloch des Pochwerkes angeleget werden sollte, nur $1\frac{1}{2}$ Fuß und unten am Ende bis 8 Fuß voneinander; der ersten Stuffe gab ich 3 Fuß Breite, der 2. niederwärts folgenden $2\frac{3}{4}$ Fuß, der 3. $2\frac{1}{2}$, der 4. $2\frac{1}{4}$, der 5. 2, der 6. $1\frac{1}{2}$, der 7. 1, der 8. 1 Fuß.

Jede Stuffe lies ich $1\frac{1}{2}$ Zoll tiefer, als ihre vorhergehende, Wagrecht legen; alle Stuffen wurden aus dem Mittelpuncte der obern engern Breite des Stuffengerinnes, als concentrische Bogen beschrieben, und wie das ganze Gerinne, so auch jede Stuffe über der andern von dännenen auf der obern Seite glatt gehobelten Brettern, so ohne Aeste waren, mit hölzernen keilförmigen Riegeln auf einen hölzernen Gerüste also befestiget, daß es leicht auseinander genommen, und nach Gefallen wieder zusammen gesetzt, auch statt der abgenutzten Stücken neue eingelegt werden konnten; mit der untern Stuffe aber lies ich es an einen Sumpf stossen, wie die 1 Fig. bey X. zeiget.

Meine Leser fordern ohne Zweifel Rechenschaft von dieser Anlage, es ist billig, daß ich sie ihnen gebe: Oben bey dem Austrageloche ist das mit Pochhaufwerk vermischte Wasser noch in der Enge beysammen, und kann sich nicht sogleich auf einmal aus-

ausbreiten, sondern es geschiehet dieses vermöge des Baues des Stuffengerinnes nur nach und nach, daher ist das Stuffengerinne oben enge und abwärts immer breiter und breiter gemacht worden, um sich nach der Bewegung des Wassers, welche nicht allein vorwärts, sondern auch seitwärts auf einer Wagerecht liegenden Fläche geschiehet, zu richten, welches Versuch und Erfahrung beweisen.

Die oberste Stuffe am Austrageloche ist vorwärts breiter, als die folgende, seitwärts aber nicht so breit, als sie, weil da zum Niedersinken der gröbsten Pochhaufwerkstheile, die sich als die mehresten am geschwindesten häufen, Platz seyn muß.

Die folgenden Stuffen sind vorwärts schmäler, je nach dem sie seitwärts breiter sind, damit beyläufig auf jeder sich fast gleich viel Pochhaufwerk aus denen Wassern nach verschiedener Kläre absetzen möge, weil deren immer klärere und klärere auch immer abwärts weniger und weniger aus dem Wasser niederfallen, welches sich dadurch erweisen lässet, daß mehrere Zeit vergehet, ehe die untersten Stuffen völlig 1 oder 1½ Zoll dicke mit Pochhaufwerk beleget werden; wie dann auch bey meinem mit diesem Stuffengerinne angestellten Versuche die Erfahrung gewiesen, daß das auf jeder Stuffe aus denen Pochwerkswassern niedergesunkene Pochhaufwerk sehr merklich unterschieden gewesen, so, daß ich so viel abgetheilte Sorten bekam, als Stuffen waren.

Die Stuffen selbst liegen Wagerecht, damit sich die auf jede Stuffe herabfließenden mit Pochhaufwerk vermischten Wasser desto besser ausbreiten, und ihre beygemischten Pochhaufwerkstheile nach ihrer Größe und Schwere daselbst sinken lassen können.

Weil die immer klärern und klärern Pochhaufwerkstheile immer weiter und weiter in dem Pochwasser schwimmend fortge-

tragen werden, und sich nicht eher aus diesem Wasser niedersenken, als bis es sich weiter ausbreiten kann; so sind die Stuffen nach und nach zu diesem Behuf seitwärts immer breiter und breiter bis an das Ende des Stuffengerinnes gemacht worden; denn die Körper von schwererer Art als das Wasser, können in demselben da, wo es seichter wird, eher zu Boden kommen, als wo es tiefer ist.

Ich habe jede Stuffe nur 1½ Zoll unter der andern vorwärts angelegt, damit die Pochwasser von einer Stuffe zur andern keinen zu hohen Fall haben, und dadurch das sich schon auf jeder Stuffe aufgesetzte Pochhaufwerk wieder mit sich fort schwemmen möchten.

Das eine Seitenbrett des Stuffengerinnes ist im Risse weggelassen, damit die Stuffen desto deulicher in die Augen fallen.

Wenn nun die Stuffen von dem aus dem Wasser niedergesunkenen Pochhaufwerke so hoch belegt sind, daß ihre Gestalt keiner Treppe mehr ähnlich, sondern fast wie eine ebene schiefliegende Fläche auszusehen anfängt, so schützt man das Pochwerksrad ab, nimmt mit einer leichten, blechernen Handschaufel das sich auf jeder Stuffe gesetzte Pochhaufwerk weg, und machet dessen so viele Sorten und Haufen, als Stuffen sind; je mehr man also Gefälle bey einem Pochwerke haben kann, je mehrere Stuffen- und Pochhaufwerkssorten wird man machen, und dadurch ohne Schlem- und Durchlaßgräben denen Waschherdten auf bessere und leichterere Art in guter Ordnung vorarbeiten können, der Versuch und die Erfahrung, so ich mit diesen kleinen Stuffengerinne gemacht, haben es bewiesen, indem ich nicht allein jede Sorte mit leichterer Mühe auf denen Herdten verwaschen, sondern auch bey dem zweytenmale Aufsetzen derselben auf

die

die Herdte, alle Schlich- oder Aerztheile aus dem Pochhaufwerke erhalten habe; obgleich alle Sorten auf Herdten verwaschen wurden, die einerley schiefliegende Fläche gegen den Horizont hatten, da sonst das Pochhaufwerk wohl sechs, sieben und mehrmal aus denen Sümpfen wieder auf die Herdte gesetzt und von neuen herunter gewaschen werden mußte.

Ich erhielt also meinen Zweck, und sahe ganz deutlich, daß durch dergleichen Stuffengerinne denen Waschherdten viel besser vorgearbeitet, wie auch viel mehr Zeit, Arbeit und Kosten bey Aufbereitung geringer Pochärze ersparet würde, als mit denen bisher gewöhnlichen Pochgräben geschehen.

Das letzte trübe Wasser, was von der letzten Stuffe in den daran liegenden Sumpf lief, ward untersucht, ob sich noch Aerztheile darinne befinden möchten; alleine es war davon schon so rein, daß man es ohne Bedenken als unnütze hätte wegwerfen können; ich bin also überzeugt, daß, je länger das Gerinne fortgeführet wird, und je mehr Stuffen darinne angeleget werden, je weniger wird der Abschuß der letzten Pochtrübe noch Schlich in sich halten, und endlich gar als purer Schlam vom Gebürge mit denen wilden Wässern fortgeschaffet werden können.

Noch etwas ist bey diesem Stuffengerinne zu bedenken, nämlich, daß die obere Stuffe eben wie bey denen gemeinen Pochgräben das Gefälle, bald und eher völlig mit Pochhaufwerk beleget und angefüllet wird, als die folgenden; denn des groben Pochhaufwerkes, das aus den Pochwässern zuerst niedersinket, ist mehr, als des klärern; daher muß das sich auf der obersten 1sten Stuffe häufig aufsetzende Pochhaufwerk öfter abgenommen werden, als das auf der 2. folgenden, von dieser öfter, als von der 3 Stuffe und so fort; es würde also auch das Pochwerk sehr oft

abge-

abgeschützet werden müssen, wenn man das Pochhaufwerk von jeder Stuffe, sobald sie genugsam beleget wäre, wegnehmen und nicht den Lauf der Pochwerkswasser und die Sortirung des Pochhaufwerks auf denen andern folgenden Stuffen hindern wollte, indem man eine von denen vorhergehenden abräumete. Diesem Uebel aber kann auf folgende Weise gar füglich abgeholfen werden:

Man fasse nämlich die mit Pochhaufwerk vermischten ausgetragenen Pochhaufwerkswasser nach der 3 Figur in ein etwann 5 Zoll weites etwas schüßiges und so langes Gerinne, daß zwey Stuffengerinne an selbiges geleget werden können; in dieses Gerinne mache man vor jedes Stuffengerinne einen Einschnitt, durch welchen die mit Pochhaufwerk vermischten Wasser auf die Stuffengerinne laufen können; man versehe diese Einschnitte mit solchen Schutzbretterchen, wie bey denen Waschherdtsgerinnen, also, daß, wenn bey *a* von der 1 Stuffe das sich aufgesetzte Pochhaufwerk abgenommen werden muß, das Schutzbrettchen bey *b* quer in das enge Gerinne gesetzt werde, und die Pochhaufwerkswasser in dessen bey *c* auf das andere Stuffengerinne laufen müssen. Ist die 1 Stuffe dieses Stuffengerinnes auch voll, daß sie geräumet werden muß, so nehme man das Schutzbrettchen bey *b* aus dem engen Gerinne, und setze das bey *c* ein, so wird das Pochhaufwerkswasser wieder auf das Stuffengerinne bey *a* laufen, und die abgeräumte 1 Stuffe daselbst wieder belegen; unterdessen, wenn die 1 Stuffen beyder Stuffengerinne ein paarmal geräumet worden, werden die 2 Stuffen derselben zu räumen nöthig seyn; man verfahre sodenn mit dem ab und anschützen eben so, wie zuvor. Auf solche Weise, wenn man bey denen folgenden Stuffen auch so verfähret, wird man nicht nöthig haben, das ganze Pochwerk so ofte wegen des Abräumens der Stuffen abzuschützen, ja man wird es, wenn nicht etwann an selbigen etwas wandelbar wird,

gar

gar nicht, wie bisher, bey Ausstehung der Pochgräben abschützen dürfen, sondern es kann vielmehr beständig fortgehen, und also in Tag und Nacht, da es sonst dreymal wegen des Ausstechens der Pochgräben abgeschützet werden muß, mehr, als bisher pochen und arbeiten.

Man ist zwar schon in denen alten Zeiten auf eine Art von Stuffengerinnen gefallen, wie die Zeichnungen im Agricola beweisen, allein es ist dazumal der Sache noch nicht hinlänglich nachgedacht, vielweniger überleget worden, daß die trüben Pochhaufwerkswasser zu ordentlicher Absetzung ihrer in sich habenden festen Theile von Schlich und Berg sich ausbreiten und dazu Platz haben müßten; weswegen sie auch dergleichen Gerinne durchaus fast von einerley Weite, und die Stuffen in selbigen nach geraden Parallellinien angelegt, welchem Fehler ich durch meine neue Anlage der Stuffen nach immer niederwärts an Größe zunehmenden Bogen abgeholfen zu haben, zuversichtlich hoffe; die genaue Betrachtung der 1 Fig. bey X. wird das übrige deutlich und überzeugend darstellen.

Von denen Aerzwäschen.

Ich sehe mich verbunden, noch etwas von denen Aerzwäschen, als welche mit der Pocharbeit zusammen hängen, zu erwehnen; ob sie gleich für diesesmal mein eigentlicher Gegenstand nicht sind:

Man hat eigentlich 2 Hauptarten von Aerzwäschen, die eine ist die Sieb- oder Setzwäsche, die andere die Herdtwäsche.

Die Siebwäsche gehöret der Ordnung nach eigentlich nicht hieher, denn sie hat mehr mit denen trocken gepochten reichern

Aerzen, und dem Grubenklein zu thun, welches das in denen Gruben bey dem Gewinnen abgebröckelte und verzettelte reiche Aerz ist, das vermittelst gewisser Siebe in einem Fasse mit Wasser abgewaschen und das Grobe zum Theil von dem Klaren geschieden und ausgeklaubet wird.

Die Herdtwäsche aber hänget mit dem nassen Pochwerke genau zusammen, und nimmt hier ihren Platz ein.

Ich habe oben der Vorarbeit des Pochhaufwerkes vor die Herdte gedacht, und behauptet, daß sie in einer ordentlichen und guten Sortirung der Pochhaufwerkstheile bestünde, daß solche durch das von mir angegebene Stuffengerinne könne erlanget, und die Arbeit des bisherigen Durchlassens und Schlemmens des Pochhaufwerks erspareт werden.

Das sortirte Pochhaufwerk wird endlich auf die Waschherdte gesetzt, und durch daraufgelassenes Wasser die Aerztheile von denen Bergtheilen gesöndert, dergestalt, daß die Bergtheile von denen Aerztheilen abgespühlet, und diese alleine auf denen Waschherdten erhalten werden. Ich habe ferner gesagt, je mehr Theile von einerley Schwere oder von einerley Größe beysammen wären, je leichter könne die völlige Absönderung der Bergtheile von denen Aerztheilen auf denen Waschherdten geschehen.

Da nun aber auch zum Abwaschen der Bergtheile von den Aerztheilen eine schiefliegende Fläche, worauf das Wasser herunter laufen kann, sehr vieles beyträgt, so müssen die Herdte mit ihren Flächen so gelegt werden, daß diese sich etwas gegen dem Horizont neigen, und mit demselben einen Winkel machen; da aber bey der Vorarbeit verschiedene Sorten Pochhaufwerk gemacht werden, so, daß immer eine klärer, als die andere ist,

und

und gröbere Sorten bey einerley Neigung eines Waschherdtes mit dem Wasser eher herunter rollen, als klärere, so wird auch vor jede Sorte Pochhaufwerk, eine andere Neigung der Herdtfläche gegen den Horizont nöthig seyn, es müssen also die Waschherdtsflächen bey einer Aerzwäsche nicht einerley Neigung gegen dem Horizont haben. Wie viel Grade aber der Neigungswinkel der Herdtfläche vor jede Pochhaufwerkssorte haben müsse, kann hier nicht angegeben werden, weil sich dieses lediglich nach der Beschaffenheit der Schlich- und Bergtheile im Haufwerke, die entweder leicht, schwer, schmierig, groß, klein und so weiter seyn kann, richten muß; denn eine andere Neigung erfordert Bleyglanz und fein Gebürge, und vieleicht eine andere ein reiches ins Gebürge zart eingesprengtes leichteres Silberärz, und so fort.

Es muß dahero jeder Pochsteiger, oder anderer der Sache verständiger Proben mit seinem Pochhaufwerkssorten auf verschiedene gegen den Horizont geneigte Herdtflächen machen, und sehen, auf welcher sich die oder jene Pochhaufwerkssorte am leichtesten geschwindesten und reinesten verwaschen läßt. Diese Proben recht genau anzustellen, wird es sich der Mühe reichlich verlohnen, da auf das Gute verwaschen, der geringen oder armen Aerze bey Bergwerken sogar viel ankommt, daß ein beweglicher Waschherdt zu solchen Proben gehalten, und so vorgerichtet werde, daß er oben, ohne herunter zu rutschen, oder hinan zu weichen, aufliege, und unten auf jegliche verlangte Höhe durch unter zu treibende Keile erhoben oder herunter gelassen werden könne; wobey zugleich auf die Menge des, auf diese oder jene Neigung des Herdtes nöthigen Wassers mit Achtung gegeben werden muß, ohne welche Bemerkung sonst die oder jene gemachte Neigung des Waschherdtes nicht viel helfen würde. Es ist denen Gewerken, so geringe Aerze verwaschen lassen, mehr als zu bekannt, daß in ihren

Aerzwäschen von langen Zeiten her bey gewissen Pochhaufwerkssorten grob Leinentuch, so die Pochwerksleute Planen nennen, auf die Herdte ausgebreitet werden, dadurch gewisse Sorten von Schlich desto eher auf denselben zu erhalten: diese Art zu verwaschen hat zwar wohl in denjenigen Zeiten vor sehr gut angesehen werden können, da die Sortirung des Pochhaufwerkes und die Einrichtung der Lage der Waschherdte noch nicht so weit als heut zu Tage getrieben gewesen; jetzo aber sind geschickte und uneigennützige Poch- und Waschwerkssteiger ganz anderer Meynung, und glauben mit mir billig und vernünftig, daß bey oben angegebener Sortirungsart, und gehöriger Neigung der Herdte gegen den Horizont zum Verwaschen einiges Pochhaufwerkes keine Planen mehr nöthig sind, und die Gewerken das Geld davor mit guten Grunde, Fug und Recht ersparen können; obgleich dieser Meynung von einigen andern Poch- und Waschwerksleuten, wiewohl ohne Grund, widersprochen werden dürfte, so lange die Anschaffung der neuen und Ablegung der abgenutzten Planen ein Profitchen vor diejenigen Leute bleibet, welche damit zu thun haben.

Ich wünsche, daß dieser Aufsatz meine gute Absicht erreichen, und denen Bergwerksliebhabern in Aufbereitung ihrer geringen Aerze den besten Nutzen schaffen möge, von welchen ich meines Orts vollkommen im Voraus durch Erfahrung überzeuget bin.



Denen



Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

1 2 3 4 5 Fuß.
Zur 2ten Figur.

Denen
hochansehnlichen Gliedern
der
churbaierischen Akademie
der Wissenschaften
seinen gnädigen, hochzuehrenden und werthgeschätzten Herren
wiedmet
diese durch Erfahrung und vorsichtiges Nachsinnen
gefundene Wahrheiten,
welche
die sammlende Lebenskraft aller Dinge, die innere Beschaffenheit der ersten Anfänge der Körper, und die natürliche Ordnung bey Erzeugung der Körper betreffen
D. Anton Rüdiger
bey der
Universität zu Leipzig
der Chymie öffentlicher Lehrer.



§. 1.

Daß jeder natürlicher Körper in allen Naturreichen, ja jeder greiflicher Theil der Körper, aus festen und flüßigen Theilen, und aus einem solchen Grundwesen, welches beyde miteinander vereiniget, zusammengesetzt sey, beweisen nicht allein die chyemischen Auflösungen der Körper durch trockenes Feuer, Salz und Wasser, sondern auch die Trennungen aufgelößter Körper von ihren Auflösungsmitteln, durch Salz oder Erde.

§. 2.

Wenn man mit trockenem Feuer die Körper der Erdgewächse, die Theile der Thiere und Insecten zergliedert, so erhält man zuförderst wässerige Theile, so entweder unter einer dunstigen mehr trockenen Gestalt, und bey einem sehr geringen Grade des Feuers, sich erheben, und die bey dem Destilliren vorgeschlagenen Gefässe gar leichte erhitzen können; oder solche, die schwerer und bey etwas stärkerm Feuer steigen, und unter einer solchen Dunst erhoben werden, welche mehr feuchte ist, und sich sehr leichte wieder in wäßrige Tropfen zusammen begiebet. Man erhält ferner aus denen Körpern durch trockenes Feuer, saure,

alka-

alkalinische, mehr zusammengesetzte Salze, und mit denen Salzen auch Oele, wesentliche oder empyrevmatische, von zerstörtem Resinösen und Gummösen oder Schleimichten entstandene. Wenn endlich alle flüchtige Materie aus denen Körpern getrieben, so kann das Fixe rückständige in ofnen Gefässen von allen weit mehr gebundenen Wäßrigen, Salzigten und Oeligten, durch Beyhülfe der freyen Luft vollends getrennet werden, da man denn nach sattsamen Calciniren, aus denen meisten Körpern, salzigte, mehr und weniger **Fette**, auch **gefärbte Erden**, erhält, welche, wenn sie einem aufgelößten Mercurialsublimat mit gehörigen Handgriffen zugesetzet werden, **Niederschläge mit sehr veränderten Farben** machen, und in so weit ihrer Natur und Eigenschaft nach unterschieden zu werden verdienen.

§. 3.

Durch **Salz** und **Oel**, oder durch ein **seifenhaftes Wesen**, sind also in Erdgewächsen und Thieren, Wasser und Erde miteinander vereiniget; weil Wasser das erste, die Erde das letzte, und Salz und Oel zwischen diesen das mittlere Educt ist. Die Mischungen aber **von mittler Beweglichkeit** müssen nothwendig Fixes und Flüchtiges zugleich in sich beschlossen enthalten, und also dem Fixen sowohl als dem Flüchtigen verwandt seyn, mithin auch zwischen festen und flüßigen ein Vereinigungsmittel abgeben können.

§. 4.

Die allen Körpern eigene Kraft muß in dem **seifenhaften Wesen** wohnen. Denn sobald man einem gemischten Körper, oder nur gewissen Theilen derselben, das Salz, besonders das öligte Salz, gänzlich entzogen hat, so sind dieselben aller ihnen eignen Kraft, wenigstens der deutlichen Empfindung nach, gänzlich

lich beraubet. Die ätherischen Oele verlieren leichte in der Luft, die in den Körper des Oels fast gar keine Wirkung hat, ihren regierenden Geist, oder ihr seifenhaftes flüchtiges Salzwesen. Wurzeln, Rinden, Hölzer, Kräuter, Blumen, verlieren durch wiederholtes sattsames Kochen mit Wasser alles Salz, und mit diesem alle besondere und eigene Kraft, und also scheinet das ölichte oder wesentliche Salz der Körper, und besonders das Salz, so in **der verbrennlichen Materie wohnet**, die erste **sammlende Kraft** der Körper zu enthalten, der es eigen ist, die erdigten und wäßrigen Anfänge der Körper nur in einem gewissen Verhältniß, oder mit besonderer Proportion zu vereinigen.

§. 5.

So wie in Erdgewächsen und thierischen Körpern, Wasser, Erde und ölichtes Salzwesen nicht nur in der flüchtigen, sondern auch in der fixen Materie der Körper befindlich sind, so kann man auch in unterirrdischem Reiche, sogar in Metallen, diese Materien und Theile der Körper, nur nicht allezeit durch bloße Auflösung mit trockenem Feuer, sondern durch mehr künstliche und eben nicht bekannte Zergliederung, vermittelst der **Salze** und **besonderer sogenannter Gradirwasser** erweisen.

§. 6.

Aus denen Metallen kann man durch verschiedene mehr einfache Salze mancherley feste und wahre erdigte Theile gänzlich absöndern. Die mehr einfachen Salze sind saure, in welchen die metallischen Körper aufgelöset werden, nach der Auflösung werden die Salze flüchtig gemacht, und bey der Flüchtigmachung söndert sich allezeit ein verbrennlicher Theil zugleich mit einem erdigten Grundwesen von dem metallischen Körper gänzlich ab. So steiget z. E. bey der Auflösung des Zinks im Salzsauren,

ren allezeit ein verbrennlicher Geist, der auch, wenn die Auflösung in einem geraumen Zuckerglase gemacht worden, gar leichte, so wie er schnell sich erhebt, kann angezündet werden.

§. 7.

Die Erden der Metalle, wenn verschiedene derselben zugleich in einem Spiritu, so man von dem aufgelößten Metalle abgezogen, eingeschlossen sind, machen mit ihrem Sauren das Gradirwasser aus, so wieder eben demselben Metalle, von welchem es gezogen, appliciret werden kann, damit nach dem wahren Ausspruch, und der gewiß höchstnöthigen Erinnerung des Paracelsi die Auflösung der **Metalle durch Metalle geschehe.** Es trennet sich sodann das wesentliche Salz der Metalle, und vereiniget sich mit seiner applicirten re inflammabili und terra. Eben dieses Salz kann nach der geschehenen Auflösung auch flüchtig gemacht werden. Wohl zu merken ist, daß das mehr einfache Salz der Metalle, mit dem Brennbaren und Erdigten in ein wahres sal salsum mercuriale gehe. Aus diesem sale salso mercuriali metallorum vero, kann man wieder zweyerley Theile trennen, nämlich einen fixen oder mehr festen, der sich mit körperlichem, aber aufgelößt gewesenen Golde oder Silber vereiniget, und das öligte **fixe saure Salz mit seiner Erde gemischt** ist. Ferner einen höchstflüßigen und flüchtigen Theil des Salzes, welcher sich bey dem Niederschlage der edlen Metalle aus ihren Menstruis trennet, und mit dem Auflösungsmittel vereiniget bleibet. Dieser flüßige und flüchtige Theil des salis mercurialis salsi ist ein bloßes mercurialisches Wasser, oder mercurialische Feuchtigkeit der Metalle. Auf diese Weise habe durch eigene Erfahrung gefunden, daß auch die Metalle in eine wahre mercurialische Feuchtigkeit, in ein saures Salz der verbrennlichen Materie, und in erdigte Theile auf-

ge-

gelöset, und auf diesem geheimen Wege recht natürlich können zergliedert werden, auch daß aus dieser Zergliederung ungezweifelt folge; wie in denen Metallen ebenfalls **Wasser, verbrennliche Materie mit ihrem Salze,** und **feste erdigte Theile** das ganze zusammengesetzte materielle Wesen dieser Körper ausmachen. Es kann dieses aber auch durch Feuer und Salz bey einer mehr bekannten Arbeit bewiesen werden. Nämlich wenn man auf gemeine Art **ammoniacalische Flores** aus denen Metallen bereitet, und hernach durch wiederholtes Sublimiren derselben, die mehr fixen Theile absöndert, so daß man im Salmiak die zartesten und flüchtigsten behält. Die flüchtigsten Erden sind zugleich leichtflüssige, und enthalten das wahre Wasser der Metalle, gleichwie die fixern und gröbern erdigten den festesten Stoff in sich beschlossen haben. Soll nun der Mercurius in den flüchtigsten Erden offenbar werden, so sind die vor sich höchstgereinigten Salmiakblumen durch einen solchen Körper noch weiter zu reinigen, der mit dem Salze der Metalle die größte Verwandtschaft hat, da man denn endlich, wenn auf diese Weise das wesentliche saure Salz der Metalle von den flüchtigsten und flüßigsten Erden abgesöndert wird, einen wahren lebendigen Mercurium erhält.

§. 8.

Nunmehr ist völlig erwiesen, daß jeder natürlicher Körper aus festen, flüßigen Theilen, und aus einem beyde miteinander vereinigenden Salze, welches der verbrennlichen Materie eigen, bestehe; und daß man dieses durch verschiedene Arten der Auflösungen, bey vegetabilischen Körpern und Thieren mit trockenem Feuer, bey denen Metallen, mit Salz, Feuer und Wasser, und hiernächst überall durch Trennung aufgelößter Körper von ihren Auflösungsmitteln ungezweifelt erfahren könne.

§. 9.

Es ist ferner merkwürdig, daß man in jedem Stoff der Körper, in denen Erden, in dem Wasser, in dem verbrennlichen Oele, in resinösen nnd balsamischen Wesen der Körper, und in gummösen Substanzen, ja in dem feinsten Brennbaren selbst, wieder Salz entdecke. Doch muß man nicht allezeit Wasser und Alkali, oder alkalinische Erde zur Entdeckung des Salzes zureichend zu seyn glauben, weil auch in dem reinsten Schnee- und Regenwasser durch Fäulniß Salz gefunden wird, so ganz gewiß ein Saures enthält, welches Gold aufzulösen vermögend. Von dem brennenden Weingeiste kann man durch die Gährung ebenfalls gewiß darthun, daß er in seiner genauesten und unzertrennlichen Mischung ein Weinsaures verborgen halte; denn der ganze Wein wird in einer hermetisch verschlossenen Phiole zu Eßig. Auch wenn der höchst rectificirte Spiritus ardens sehr oft über dem Alkali destilliret wird, so macht er etwas von dem Alkali zu einem sale neutro, so Balsamum Samech genennet wird, zu dem so befördert der Spiritus ardens die Crystallisation der Salze, ja wenn man noch tiefer nachforschet, so muß und soll der verbrennlichen Materie ein Salz wesentlich seyn; denn in dem Verbrennlichen ist gewiß elementarisches Feuer gesammelt, wie man bey der Auflösung des Brennbaren durch flammendes oder glimmendes Feuer mit Augen siehet. Ferner so sind in der Natur nicht allein feste, sondern auch flüßige verbrennliche Materien gegenwärtig. Demnach muß die reinste verbrennliche Materie eben sowohl mit Wasser als mit Erde können gemischt werden. Nichts aber hat eben sowohl mit Wasser als Erde Verwandtschaft, als das einfache saure Salz. Demnach muß in der verbrennlichen Materie, das elementarische Feuer durch saures Salz gesammelt seyn. Nicht allein das elementarische Feuer, sondern auch sogar die

die Luft, und das Lichtwesen selbst, finden wir an salzigten Theilen gesammelt, wie der Salpeter und das wesentliche Salz des Urins, aus welchem allein, bekannter massen der Phosphorus bereitet werden kann, überzeugend beweisen. Das ganze Meer ist voll von Salze, welches mit dem Wasser die größte Verwandtschaft hat. In der Erde und mineralischen Wässern finden wir das ursprüngliche vitriolische Salz besonders ausgestreut. Und also ist keine Materie der Körper und kein Element, das nicht ein ihm eignes Salz bey sich führte. **Der Sammlungspunct von Elementen scheinet wahrhaftig Salz zu seyn.**

§. 10.

Eben so allgemein als die Materie des Salzes ist, scheinet auch das Brennbare, dessen Wesen vom Salze nicht getrennet werden kann, zu seyn. Denn keine Erde, kein Wasser, kein Körper der verschiedenen Naturreiche, ist von der verbrennlichen Materie ganz frey. In der Luft selbst haben verschiedene Erscheinungen (meteora) und im Lichte die electrischen Versuche die Gegenwart des Brennbaren sattsam bewiesen. Der scharfsinnige Stahl hat auch ganz besonders sich bemühet, mit Grunde der Wahrheit das Brennbare als eine überal ausgestreute Materie zu zeigen, Observ. Chymic. CCC. Berol. 1731. Ja wenn ich erwäge, daß die genaue Mischung der Erde mit dem geistigen Saüren gar nicht anders geschehen könne, als wenn das geistige Saure durch Erde figiret, und durch Wasser und Brennbares zugleich mit der Erde flüchtig gemacht wird, so empfinde gar deutlich, daß das Brennbare, welches aus der **reinsten und flüchtigsten Mercurialerde**, oder dem elementarischen Feuer selbst und saurem Salze §. 9. bestehet, ein Band- und Vereinigungsmittel wieder zwischen Erde und Salze nothwendig seyn müsse. Demnach würde

aus dem geistigen ursprünglichen obern und untern Sauren mit Wasser und Erde nimmermehr ein einiges Wesen, ein erster Grund der Körper erzeugt werden, wenn nicht die verbrennliche Materie, eine wahre Vereinigung zu machen, geschaffen wäre. Das Brennbare wirket aber mit dem Wasser nach einem beständigen Naturgesetze nur in diejenigen Theile der ursprünglichen Salze und der Erden, welche seiner höchstsubtilen sulphurischen lebendigen Kraft am ähnlichsten sind. Auf diese Weise wird in der Natur beständig ein zarter Schwefel des Salzes, und eine vollkommene lebendige Kraft des Salzes aus dem allgemeinen Sauren mit Erde und Wasser, vermittelst des feurigen Geistes im Brennbaren, erzeuget. Es bestrebet sich immer das Salz, der verbrennlichen Materie seine Kraft aus dem ursprünglichen Sauren zu vermehren, und durch Erde und Wasser zu sammeln, und in einer mehr sinnlichen Gestalt darzustellen. Durch dieses natürliche Bestreben und Wirken der Mischungen in einander, entsteht ein vergrößertes Leben des **ersten Wesens der Körper**, oder des **Brennbaren**. Dieses **vergrößerte Leben** des **Brennbaren**, könnte man seines Ursprunges wegen gar füglich den **Schwefel** des **Natursalzes** nennen. Es entstehet dieser zwar allezeit aus dem ursprünglichen Sauren, aber nicht allein aus dem Untern, sondern auch aus dem Obern. Das Obere finden wir durch Trübsand und alkalinische Erde im Meersalze figiret, das Untere ist mit der Fettigkeit der Erde vereiniget. Wenn also das **Brennbare** das vitriolische Saure zugleich mit der Fettigkeit der Erde flüchtig gemacht hat, so wirkt es auch in das figirte Obere, welches letztere durch das erstere wieder flüchtig gemacht wird, indem beyde wieder mit dem Salze der verbrennlichen Materie und mit Wasser vereiniget werden, so entsteht ein einiges vollkommenes Wesen; nämlich ein flüchtiger Schwefel des ursprünglichen Salzes. Sobald dieser wieder durch Erde figiret, und durch sein eignes Wesen

sen wieder flüchtig geworden, so hat man ein **sulphurisches Wesen des Natursalzes**, welches gesammelte, durchdringende, belebende, und also vollkommene große Kräfte enthält. Dieses Wesen ist es, welches aller Zerstörung entgegen, die Erzeugung der körperlichen Kraft befördert, und dem ungeachtet die Körper in der Möglichkeit zerstört zu werden erhält, weil in dem Salze der verbrennlichen Materie das elementarische Feuer selbst der regierende Geist dieses Wesens ist. In diesem sulphurischen Grundwesen des Natursalzes ist der allgemeine Saamen aller Dinge, der überall in allen Körpern und Anfängen derselben die Abbildungskraft, oder die anziehende sammelnde Lebenskraft ausmacht, ohne welcher nichts wachsen, leben und sich vermehren kann.

§. II.

Die nähern Anfänge der Körper entstehen alle von diesem einigen **Grundwesen des allgemeinen Naturschwefels**. Ohne diesem wären die Anfänge der Körper tode, leidende, und könnten zu ihrer Vermehrung sich mit keiner lebendigen Kraft bestrebend äußern. Wenn die Kraft des Naturschwefels in die fette, sandigte und alkalinische Erde wirket, so werden alle figirende Lebenskräfte des Naturschwefels, die Kraft des vitriolischen Sauren, die bindende und fette Erde selbst abgesöndert, und mit beyden bleibet das Wasser und elementarische Feuer vereiniget, und so entstehet aus Erde, Salz und Wasser des allgemeinen Saamens aller Dinge, mit der alkalinischen und sandigten Erde der figirende *Sulphur*. Wenn hingegen der Schwefel des Natursalzes in das Brennbare selbst und in die dem Sauren entgegengesetzte Erde wirket, so scheidet sich aus dem Naturschwefel das Brennbare mit wenigem schweren und leichten Wasser, und am meisten die sandigte und alkalinische mit salzsaurem geschwängerte

Erde,

Erde, da denn wieder aus Salze, Wasser und Erde des Naturschwefels, die kräftige Substanz des wesentlichen oder färbenden Sulphuris ihren Ursprung erhält. Endlich kann auch das Wasser vornehmlich und am häufigsten in jedem Naturreiche, in die Theile des Naturschwefels wirken, da alle flüchtigmachende Kräfte, die Kraft des flüchtigmachenden Sauren, die Kraft der dem Sauren entgegengesetzten und zugleich fetten Erde sich absöndern, und also das flüchtigmachende sulphurische lebendige Grundwesen, mit dem schweren und bindenden Wasser vermischt, aus dem allgemeinen Saamen hervorgehet. Zum Beweise aller vorhergesetzten Entstehungsarten der Anfänge aus dem allgemeinen Leben der Dinge, sind diejenigen Erfahrungen mit vorstehenden Lehrsätzen zu vergleichen, so ich §. 20. und 24. angeführt habe.

§. 12.

In eben der Proportion, in welcher sich das feste, flüßige und aus beyden gemischte, von besonderer Art aus dem allgemeinen Saamen getrennet oder abgesöndert hat, in eben demselben Verhältniß müssen sich auch die übrigen gleichartigen Theile mit der ersten Grundlage verbinden; weil die lebendige Kraft in jedem besondern Anfange der Körper, auch eine durch Mischung besonders abgemessene Anziehende ist. Die halbflüchtige sulphurische Erde ist eigentlich die allgemeine anziehende, so ich in jedem Magnetstein als eine solche beweisen kann. Von dieser, überhaupt betrachtet, entstehen alle besondere durch Beymischung des Brennbaren, oder allgemeinen Sauren, oder des Wassers und Salzsauren, abgemessene sammlende Kräfte, vermittelst welcher zuförderst drey Hauptarten der Körper erzeugt werden, unter welchen einige vornehmlich das figirende, andere das färbende, und die dritte Art das flüchtigmachende Leben enthalten; jedoch mit die-

diesem merkwürdigen Unterschiede, daß nicht allein in denjenigen Körpern, so aus dem figirenden Leben geboren worden, sondern auch in denen, welche das flüchtigmachende Salzwesen zum Grunde haben, und in denen, in welchen die sulphurische Erde nebst dem Brennbaren die erste Grundlage gewesen, in jeder besonderen Art wieder vornehmlich entweder das Wasser, oder die trockene Erde, die herrschende Mischung ausmachen könne; daher denn von jeder ersten Art wieder zwey Arten der Körper (Decomposita) abstammen; und also aus denen Kräften des allgemeinen Saamens in allen **neun Arten** der Körper, eine vollkommene Anzahl, gebildet werden, bey denen wieder alle nur mögliche, ja eine unendliche Anzahl mehr und weniger zusammengesetzter und in ihrer Kraft auf das mannigfaltigste abgemessener Körper ihren nähern Ursprung finden. Es wäre also ein feines Räthsel, welches man denen besonders, die chymische Weisheit zu besitzen meynen, um die wahre Größe ihrer Einsichten unpartheyisch zu prüfen, zur Auflösung vorlegen könnte:

> **Wie man die Zahl 9, als die vollkommenste, nicht in einer arithmetischen, sondern chymischen Betrachtung erweisen könnte?**

§. 13.

Da also von den ersten Anfängen der Körper keine zureichende, und das innere Wesen derselben bestimmende Erkänntniß möglich ist, wo man nicht die allgemeine Saamenskraft vorher erforschet hat, so hätten die Araber sowohl, als der **Basilius** und **Paracelsus**, und der Herr **Becher**, und alle noch neuere **Chymisten**, ehe sie die erzeugenden nähern Anfänge der Dinge zu betrachten vorgenommen hätten, das Leben selbst, von welchem die erzeugenden Anfänge entstanden, betrachten sollen. Auch

war es nöthig, erst das, was alle Körper gemein haben, nämlich das flüßige, feste, erdigte, und das Band von beyden zu beweisen, um richtig urtheilen zu können, ob sich auch alles, was in Körpern gefunden wird, deutlich und ungezwungen aus den gesetzten Anfängen herleiten lasse; und ob auch in den ersten Grundwesen zur Erzeugung, Sammlung und Vermehrung der ersten Anfänge zureichende Kräfte gegenwärtig sind?

§. 14.

Die nächsten Anfänge der besondern Körper, in soweit sie wirklich einander entgegen gesetzt werden können, müssen sie *nicht untereinander gemischt seyn*. Jeder besonderer Anfang aber eines aus flüßigen, festen, und beyde verbindenden Theilen jederzeit bestehenden Körpers, muß und soll vor sich gemischt seyn, und ex sibi invicem admixtis unius essentiæ, diversæ tamen formæ, **bestehen**; denn sonst könnte nicht von dem Anfange das flüßige sowohl, als das feste, und das Band von beyden in der körperlichen Zusammensetzung erzeugt werden. Wie die aufmerksame Erfahrung lehret, so ist in flüßigen, festen und beyde vereinigenden Theilen, nur die Proportion der admixtorum, nicht aber das Wesen unterschieden, daher kann der nächste Anfang eines Körpers nicht eines vielfältigen Wesens, sondern er muß unius essentiæ seyn; er mag in dichtflüßiger, oder fester Gestalt, oder gar in Gestalt der Luft erscheinen. Wenn die Anfänge der Körper nicht lebendig wären, so könnten sie mit keiner sammlenden anziehenden Kraft nach der Vergrößerung ihres Wesens streben, und den körperlichen Zusammenhang, wenn er entstanden, erhalten. Es würden ohne diese Eigenschaft entweder gar keine Körper gezeugt werden; oder die entstandenen Körper wären der allerleichtesten Zerstörung und Zerstreuung unterworfen. Daher soll der nächste

An-

Anfang von zerstörenden und die Erzeugung hinderenden Dingen sattsam gereiniget seyn.

§. 15.

Aus allen vorher bewiesenen Grundsätzen folget also, daß die nächsten Anfänge der Körper seyn müssen

1) **Einfache**, *rebus diversæ essentiæ neutiquam permixta*, und also *unius essentiæ, simplicia*.

2) **Reine**, *pura*, **von allen zerstörenden und unwirksamen sattsam gereinigte.**

3) **Lebendige**, *viva, h. e. penetrandi & coagmentandi vi prædita*, **sammlende, und in das Feste sowohl, als das Flüßige leicht eindringende.**

Wenn besondere und einzelne Körper entstehen sollen, so muß das erste lebendige Wesen, **entweder von der Erde, oder dem Brennbaren, oder dem Wasser** in seiner Kraft besonders abgemessen werden, so trennt sich von dem Leben ein einiges, der innern Kraft aber des scheidenden völlig ähnliches und gleiches Wesen. Denn alle Körper sind aus einem sulphurischen Wesen des Natursalzes, und doch dreyen substantiellen Grundmischungen; nämlich **Erde, Wasser** und **dem Brennbaren**, die aber selbst aus dem einen hervor und wieder in dasselbe eingegangen, entstanden.

II.

§. 16.

Im zwölften und dreyzehnten Jahrhundert, da die **Araber** und **Saracenen** sich mit Untersuchung der Metalle und Mineralien lange Zeit beschäftiget hatten, wurden endlich solche Bestimmungen von Anfängen der Körper gegeben, aus welchen man

nicht einmal lernen konnte, wie die Natur unterirrdische und metallische Körper erzeuge, geschweige, daß man die deutliche Erzeugung der Körper in andern Reichen daraus hätte einsehen können. Ein Mercurius, und ein diesen Mercurium bindender, dicht und festmachender Sulphur, sollen zur Erzeugung aller Körper nach denen Grundsätzen der Araber erfordert werden. Was ist aber der Schwefel, an sich betrachtet, ist er etwas verbrennliches, oder was unverbrennliches, oder ist er etwas aus beyden gemischtes? (**Der erste Sammlungspunct aller Dinge war aus beyden vereinigt entstanden** §. 9. 10.) Ferner möchte man fragen, ob der Sulphur ein Salz hätte, und was es vor ein Sach wäre. Und wenn das Verbrennliche zugleich mit dem Salze in dem Sulphure enthalten; ob das Verbrennliche bey dem Salze seyn müsse, oder ob es auch weg seyn könne; und was endlich der Sulphur als Sulphur wirke? Bevor nicht diese Fragen aufgelöset werden, kann man den Sulphur als ein deutliches Grundwesen der Körper nicht annehmen. Was ist nun ferner das festmachende und bindende in dem Sulphure, ist es vom Sulphure unterschieden? oder gehört es zu dem Sulphure? Und endlich, was wird man sich unter dem Mercurio selbst vorstellen müssen; ist es ein gemeines oder philosophisches Quecksilber. Ich glaube, beyde könnten kein wahres und weniger vermischtes Grundwesen der Körper abgeben.

§. 17.

Zu Anfange des sechszehenten Jahrhundert fieng der **Theophrastus Paracelsus** nach der Anleitung eines Basilii Valentini an, die Grundsätze der Araber zu bestreiten. Er glaubte ein seiner materiellen **Beschaffenheit nach ganz unbestimmtes Salz, ein eben so unbestimmter Schwefel**, und endlich ein **subtiles**

äthe-

ätherisches **Wesen**, so er unter dem Mercurio verstanden wissen wollte, könnten mehr zur Erzeugung der Körper zureichende Anfänge vorstellen. Was nun aber erst den Mercurium des Theophrasti betrift, so fraget man billig, in was für einer Materie dieser ätherische Mercurialgeist ruhet? Ist er vieleicht im Wasser, Erde und in einem sauren Salze sinnlich? wie z. E. das elementarische Feuer, das in Spiritu ardente von Salze gesammelt, und mit Wasser vermischt ist §. 9. Wenigstens müßte das subtile, ätherische Wesen, und der Mercurius erst der Materie nach definiret werden, ehe man ihn, als ein mögliches chymisches Grundwesen der Körper zulassen könnte. Der Sulphur soll derjenige Anfang seyn, von welchem Geruch und Zusammenhang der Körper entstehen. Aber was ist das für ein Zusammenhang, welchen der Sulphur verschaffet, ist es vieleicht derjenige, den schon das Wasser leistet? so haben wir den Sulphur nicht nöthig; oder soll unter dem Zusammenhang eine Vereinigung von festen und flüßigen verstanden werden, so müßte der Sulphur Salz bey sich haben, weil ohne dem Salze, in welchen schon festes und flüßiges gemischt ist, keine Vereinigung des festen und flüßigen geschehen kann. Wie kann ferner der Geruch vom Sulphure ohne verbrennliche Materie entstehen, da alles riechende besonders denen Oelen, balsamischen und verbrennlichen Geistern eigen ist. Demnach ist der Sulphur ebenfalls **nicht der Materie**, sondern nur der Wirkung nach bestimmet worden. Das Salz, als das dritte Grundwesen, soll denen Körpern die Festigkeit geben, wie kann man aber von dem, was **im Wasser so leichte auflößlich ist**, in soweit es die Eigenschaft hat, eine beständige Härte erwarten. Es ist überal Salz, **im Wasser, in der Erde, in der verbrennlichen Materie**, wie die oben angeführten Erfahrungen sattsam bewiesen haben; und also ist **das Salz kein besondrer Anfang** (principium), **sondern nebst dem elementarischen Feuer allen An-**

fängen der **Körper** wesentlich und gemein §. 9. Daß aber die Erde fest mache, wenn sie der allgemeinen Kraft des Salzes eine besondere Abmessung ertheilet, ist mit der Wahrheit, Erfahrung, Vernunft und Natur durchaus übereinstimmend; und also werde ich glauben, was die Natur redet; die Erde ertheilet dem Salze selbst Festigkeit, Härte und Feuerbeständigkeit, wenn sie von **Wasser**, einfachen Salze und **Verbrennlichen** nicht übersetzet wird.

§. 18.

In neuern Zeiten haben endlich des vortreflichen und **scharfsinnigen Bechers** Lehrsätze, von den ersten Anfängen der Körper, und seine **drey Erden**, als zureichende Grundwesen der Körper, auch bey allen tief nachdenkenden und wahrhaftig gelehrten Männern den meisten Beyfall gefunden. Es ist wahr, daß alles, was aus den Körpern erhalten wird, es mag Wasser, Salz, Oel, u. s. w. seyn, doch allezeit eine verborgene, feine und einfache Erde in sich habe, und daß der fixe und feste Theil aller Dinge ganz gewiß trockene Erde sey. Herr **Becher** erinnert aber hin und wieder in seinen Schriften, daß seine Erden auch unter der Gestalt des Wassers, eines Rauchs und der Dunst, und wie eine Luft erscheinen; und also bisweilen viele, bisweilen nur wenigere flüßige Theile beygemischt haben. Eben dieser Ursachen wegen ist in allen erdigten Anfängen ein Bestreben gegen das Wasser, und des Wassers gegen die erdigten Theile, weil genau gemischtes Wasser, allen auch trockenen Erden beywohnet; ist dieses, so folget ferner, daß in der trockenen Erde sowohl, als in dem befeuchtenden Wasser, Spuren eines feurigen Salzgeistes, als eines Bandes fester und flüßiger Theile §. 9. seyn müssen. Und also wäre die allgemeine Idee der Erde des Hrn. **Bechers**, wenn

wenn sie recht erklärt würde, nur ein mehr fester und trockener Theil, von dem §. 10. 11. erwiesenen und seiner Erzeugung nach bestimmten Naturschwefel. Da aber der Herr Becher den allgemeinen Begriff der Erde nicht auf diese Weise deutlich aufgeschlossen, und die besondere figirende sulphurische und mercurialische Erde, nur nach gewissen äußerlichen unterscheidenden Kennzeichen, in Physica subterranea, in Alphabetho minerali, in Oedipo chemico betrachtet hat; ich aber mehr auf das innere Wesen der ersten Anfänge in dieser meiner Abhandlung gesehen habe, so bin ich durch die genauere Nachforschung in Stand gesetzt worden, mehr Fragen, so bey der Erkänntniß des Wesens der Körper zu beantworten vorfallen, aufzulösen.

Z. E. 1) In was vor Ordnung, und durch was vor Mittel man die ersten Grundwesen der Körper absöndern könne §. 7. und 25?

2) Was vollkommen und unvollkommen in jedem Grundwesen sey? §. 23.

3) Wovon die vermehrende, durchdringende, elastische Kraft in denen Anfängen der Körper entstehe, §. 10. 27., **und ob man alle Wirkungen der lebendigen Anfänge in die Körper vollständig bestimmen könne?** §. 27.

4) Wie man von jedem Körper seine vollkommene und lebendige Kraft leicht trennen könne? §. 26.

5) Wie man das Verhältniß des einen Grundwesens gegen das andere dergestalt anzeige; daß aus dem Wesen ihrer Materien, die nöthige und zugleich nützliche Verwandtschaft erhelle. §. 29.

§. 19.

§. 19.

Einige von den neuesten Chymicis haben es noch besser als die alten, und der vortrefliche Herr Becher zu treffen geglaubet, wenn sie gar fünf Anfänge der Körper setzten, nämlich 1) Erde, 2) Wasser, 3) Salz, 4) Brennbares, und 5) Arsenicalwesen. Die drey letztern Salz, Brennbares und Arsenicalwesen sollen auch in allen vegetabilischen und animalischen Körpern wohnen. Wer fühlet hier nicht das widernatürliche und erzwungene in denen Begriffen sogleich, und wo kann ein Salz ohne dem brennbaren Wesen in der Natur gefunden werden. Was soll das arsenicale principium, welches nicht einmal ein wahrer und reiner Anfang der Metalle, sondern vielmehr ein Körper ist, in welchem die Erde, das Salz und der Mercurius der Metalle zugleich sind, und noch darzu in einer zerstörenden Unvollkommenheit ist, um ein Auflösungsmittel vielmehr von dem wahren metallischen Saamen abzugeben, und wie kann man also dieses Gift zu einem principio aller Körper machen. Ja wendet man ein, man müßte das Arsenicalwesen nicht so grob annehmen, sondern recht fein, subtil und rein. Aber ich antworte, alles was man zum Beweise dieses Principii vorbringet, zielet insgesammt auf das gemeine, nur verschiedentlich geänderte metallische Arsenicalsalz. Der Tartarus vegetabilis soll Arsenik haben, weil er das Kupfer weis machet. Aber wie machet er es weis? löset er es wohl gar auf? Allerdings! so wirkt aber der Arsenik nicht. In vegetabilibus und besonders in der Asche der Erdgewächse soll es seyn, weil der Magnet Eisentheile darinne entdecket. Gehören diese zum Wesen der Asche? ferner der erstickende Kohlendampf soll vom Arsenik in Erdgewächsen zeugen. Im Blute soll auch ein Arsenikalwesen seyn, weil bisweilen Eisentheilchen darinnen gefunden worden. Und der Phosphorus urinæ, weil er einen

Knob-

Knoblauchsgeruch giebt, wie der gemeine Arsenik, und das Urinsalz die Metalle in Mercurios soll verwandelt haben, so scheinet es gewissen Gelehrten, als wenn was arsenikalisches auch in Körpern der Thiere wohnte. Jedoch was halte ich mich bey solchen gar zu leichte zu widerlegenden Vorstellungen auf, die endlich auf weiter nichts als lauter Widersprüche hinaus laufen. Viel besser ist es, die wahren und ächten Anfänge der Körper aus ihrer lebendigen Quelle nunmehro noch genauer zu erwägen, und zugleich die Körper zu bestimmen, in welchen die ersten besondern Anfänge mehr vollständig, und gleichsam in ihren eigenen Behältnissen, mehr abgesöndert erscheinen; und endlich aus diesen durch Erfahrung und Vernunft gefundenen Wahrheiten die allerwichtigsten und nützlichsten Fragen §. 18. practisch aufzulösen und zu beantworten.

§. 20.

So wie in thierischen Körpern und in Microcosmo alle Säfte und Lebensgeister aus dem Blute abgesetzet werden, so werden auch in der großen Welt alle Körper und Anfänge derselben aus dem ersten sulphurischen Grundwesen erzeuget. Wären **in dem Blute der Natur** nicht schon alle Kräfte des flüßigen und festmachenden Geistes, so könnten **Wasser** und **Geist** nicht von dem Blute abgesöndert werden. In dem ersten sulphurischen Grundwesen liegt der Saame und die vermehrende Kraft aller Dinge. In ihm ist die wahre Abbildungskraft des denen Körpern eignen, festen, und auch eigenen flüßigen anzutreffen. Es sind in dem ersten sulphurischen Grundwesen geistige Kräfte eines Glanz und Farbe ertheilenden sauren Salzes, Feuer, Luft und Licht; ja das **belebende Leben** wohnen in diesem Blute der Natur. Der allerflüßigste und flüchtigste Theil desselben ist

ein gedoppelter Geist des Wassers, theils **trocknend** und **feurig**, theils **feuchtend** und **leicht zu coaguliren**; wie bey Zergliederung besonders des Blutes der Thiere, die geistige Natur des **feurigen Wassers**, mehr sinnlich und körperlich vor Augen geleget wird. Man könnte den Geist dieses **feurigen Wassers** den **allgemeinen Lebensgeist** (mercurium universalem) nennen. Der allerfesteste Theil dieses Naturschwefels ist eine mit salzsaurem halbflüchtig gemachte und daher genau gemischte theils alkalinische, theils zarte sandigte Erde; das feste sulphurische, unctuöse zähe erdigte und erste Grundwesen aller sulphurischen Körper lässet sich gänzlich in einen weißen lichtreichen Rauch auflösen. Feuer und Licht des Naturschwefels können ohne Luft nicht vereiniget bleiben. Die Luft aber wohnet nächstens in dem sauren Salzwesen des Naturschwefels selbst; und dieses muß von dem **Ursprünglichen** und von dem **Salzsauren**, wie schon §. 10. bestimmt worden, seine Vermehrung wenigstens erhalten haben, angesehen sich aus dem festen erdigten Grundwesen ein solches gedoppeltes Salz scheiden lässet.

§. 21.

Das sulphurische erste Grundwesen ist in allen Körpern aller und jeder Naturreiche das Band von Erde und Wasser, und das Leben aller Anfänge der Körper; daher ist die mögliche Proportion des Wassers und der Erde und des Sauren in dem ersten sulphurischen Grundwesen ungemein mannigfaltig; daher Zusammenhang, Schwere, Flüchtigkeit, Flüßigkeit, Festigkeit, Feuerbeständigkeit, als sehr unähnliche Eigenschaften dem ungeachtet von einem Wesen entstehen können, wenn nur entweder der saure Theil, oder der wässerige und feurige Theil, oder auch bisweilen der erdigte Theil, oder der erdigte und saure zugleich

die

die Oberhand hat, und den ersten Grund zum Anfange besonderer Körper darreichet.

§. 22.

Besondere Körper sind zuförderst diejenigen, welche aus einem weniger zusammengesetzten Wesen des Naturschwefels ihren Ursprung haben. Ein Principium oder Anfang eines Körpers ist allezeit ein besondrer mit Kraft und Leben begabter Theil des Naturschwefels. Ein solcher Theil kann zuförderst der Geist der verbrennlichen Materie im Naturschwefel selbst mit seiner Erde seyn, in so weit vielweniger salzigte und wässerige Theile mit dem genau gemischten brennbaren und erdigten Wesen vereiniget sind. Aus diesem Anfange entstehen ohne Zweifel alle Körper, so verbrennliches, riechendes, gefärbtes, erwärmendes, glänzendes, öligtes, unctuöses, und viel Feuer und Licht enthalten; als **Oel, Balsam, Seife, Schwefel, alle Saamen der Erdgewächse und Blumen.** Im Fette und in der Galle der Thiere, ist derjenige Theil des Natursalzes, den man den sulphurischen wesentlichen nennen kann, am häufigsten. In einigen Metallen, in Eisen, Kupfer, ist von der verbrennlichen Materie und von der Erde am meisten; des Wassers und Salzes ist allezeit in diesen Körpern wenig. Daher sie alle mehr trocknende Eigenschaften haben; von dem Mangel des Wassers und Salzes in der Erde des Eisens, und also von der Reinigkeit und Menge der reinen Erde kömmt, z. E. die Härte dieses Metalles. Daher der Herr Becher in seiner Physic. Subterran. Libr. I. Sect. III. Cap. III. die sulphurische Erde von sale acido gänzlich abgesöndert wissen wollen; aber warum nicht auch von überflüßigen Wasser, wie Fett und Oel, als Körper, in welchen die sulphurische Erde am meisten, sattsam beweisen. Es kann aber nicht alles sal acidum

von dem sulphurischen Principio weg seyn. Es ist nur des sauren Salzes sehr wenig, der Erde und des Brennbaren sehr viel. Ein sehr weniges und von Erde und Brennbaren auf das genaueste gemischtes sal acidum ertheilet Farbe und Glanz, und den stärksten und fast unzertrennlichen Zusammenhang. Wie könnte das sulphurische Grundwesen unter der Gestalt des Wassers, der Luft, wie der Herr Becher selbst gestehet, und gar des Salzes, als in nitro, tartaro, erscheinen, wenn es überall in der Natur vom sale acido gänzlich getrennet wäre; vielmehr muß man mit Grunde behaupten, das allerreifste und also am stärksten gemischte sal acidum ist allezeit in dem sulphurischen Grundwesen, und denen daraus entstandenen Körpern zu finden; z. E. in Traubensafte und vielen andern Säften der Erdgewächse. In so weit diese zu den sulphurischen gehören, haben sie freylich der Erde und des Brennbaren viel, aber das saure Salz, welches aus flüchtigen und fixen auf das genaueste gemischt ist, mangelt in denselben deswegen nicht ganz.

§. 23.

Ganz eine andere Beschaffenheit hingegen findet man in denjenigen Körpern, welche nicht aus den genau gemischten Salztheilen des Naturschwefels, sondern z. E. aus der glasachtigen Erde desselben, und aus dem figirenden Theile des Salzes, nämlich dem ursprünglichen Sauren, ihren Ursprung genommen haben, oder welche aus dem figirenden Theile des Lebens entstanden sind. In dem figirenden Theile ist außer der glasachtigen Erde und dem ursprünglichen Sauren allezeit ein mehr dunstiges und leichte steigendes, als schweres und befeuchtendes Wasser zu finden. In durchsichtigen Steinen, Crystallen, Spath, Blenden, Katzensilber, im Spiesglase, Bley, sind lauter

ter bindende Kräfte des sulphurischen Wesens. In denen ursprünglichen Erden (terris primitivis) und zwar in denen meisten, in der Sanderde, Kalkerde, Thonerde, sind sattsame Spuren des ursprünglichen Sauren, auch erhält man aus blauen Letten, ein dunstiges, trocknes, feuriges Wasser, so durch die bindende Kraft des Naturschwefels figiret worden. Alle harte, knochichte Theile der Thiere, alle Hörner, Zähne haben ein Oel und Salz, und also sulphurisches Grundwesen, aber der bindende Theil der Erde hat dennoch die Oberhand. Die Rinden, Hölzer, harten Wurzeln der Erdgewächse, haben zwar sulphurische, oft viel färbende Theile, aber das bindende Saure und die alkalinische auch magere Erde ist häufig in ihnen, z. E. lignum corgli, cortex sima ruba, fungus melitensis &c.

§. 24.

Die Erfahrung und chymische Zergliederung lehret auch ferner, daß in andern Reihen der natürlichen Körper vielmehr die alkalinische Erde vom Sulphure mit dem flüchtigmachenden Sauren gemischt sey, und mit dieser sich das schwere Wasser (aqua roris) vielmehr, als das dunstige (aqua de die rarefacta) vereinige; ob es gleich wahr, was der Herr Becher behauptet, **daß die allerreinste, er hätte auch setzen mögen, flüchtigste Mercurialerde**, in einem brennenden Geiste, von sale acido geschieden, ruhe; oder in dem **elementarischen Feuer selbst**. In allem Thau= Schnee= und Regenwasser ist die terra salis marini dem nitrösischen sulphurischen zugesetzet. Im Arsenik, Salmiak, Zinn, Quecksilber, ist die mit flüchtigmachenden Sauren gemischte alkalinische Erde, so man eigentlich Mercurialerde nennen sollte, häufig anzutrefen; in sale nativo urinæ, und jedem andern sale, daraus ein Phosphorus bereitet wird. Die meisten lymphatischen

Säfte der Thiere verbergen in ihrer Mischung ein flüchtig gemachtes sal marinum, oder ammoniacalisches Salz, so viele subtile, brennbare Theile und wässerige zugleich enthält. Wie groß ist endlich die Menge der Körper im vegetabilischen Reiche, die eine dem flüchtigmachenden Sauren beygemischte terram antacidam haben. In Scordio, Dictamno, Allio, Rd. Selery, Acetos. prat., in Carduo Bened. Rd. Polypod., und sehr vielen andern behält das mercurialische Wesen die herrschende Mischung. Ich könnte der Erdgewächse, so durch eigene Experimente erforschet, noch ungemein viele nennen, in denen der mercurialische Theil vom Sulphure die Obherhand hat. Jedoch es ist meinem gegenwärtigen Zwecke weit gemäßer, zur Beantwortung der schweren Fragen fortzugehen, die bey einer wahren Einsicht in die ersten Anfänge der Körper, und in ihr inneres Wesen gar leichte mit Bestimmung der nützlichsten practischen Wahrheiten können aufgelöset werden.

§. 25.

Wer also Körper, besonders im mineralischen Reiche, recht naturgemäß zergliedern will, der muß zuförderst die flüchtige salzigte Erde, in welcher der Naturschwefel wohnet, absöndern, und hernach aus derselben den **bindenden** und **wesentlichen**, den **flüchtigmachenden** und **wesentlichen** *Sulphur* in zweyen Substanzen trennen, in jeder von diesen beyden ist der **wesentliche** *Sulphur* als der **dritte** verborgen. Diese bey der Ausübung vorfallende Nothwendigkeit von einer bleibenden Vermischung hat die Araber eigentlich veranlasset, den bindenden Sulphur und Mercurium als wahre Grundwesen der Körper anzugeben, und des wesentlichen nicht zu gedenken, weil er sowohl in bindenden Wesen, als Mercurio verborgen war. Das hierzu nöthige Verfahren habe §. 7. ausführlich und verschiedentlich bestimmet.

§. 26.

Wer die herrschende Grundmischung in einem Körper durch angestellte Versuche schon ausgeforschet hat, oder von andern angegeben, aus Schriften, auch mündlichen Unterrichte erlernet hat, der kann mit einem recht ausgesuchten Menstruo, ein solches salsum volatile absöndern, so zur neuen Gebährung der Körper ungemein fruchtbar ist, und in dem die Abbildungskraft, entweder von flüchtigmachenden, oder bindenden, oder färbenden Sulphure am allerhäufigsten und am allerstärkesten wohnet; Nur muß er folgende practische Regeln in Acht nehmen.

1) **Ein bindendes und mercurialisches** *Menstruum* **löset die beste Kraft aus dem sulphurischen färbenden auf.**

2) **Ein bindendes und öligtes** *Menstruum* **dringt in das vollständigste Leben des flüchtigmachenden** *Sulphuris* **ein.**

3) **Ein sulphurisches und mercurialisches Auflösungsmittel erhebet die beste und vollkommenste Kraft aus dem bindenden** *Sulphure.*

§. 27.

Die vollkommenen Kräfte der Körper, wenn sie recht abgesöndert werden, so äußern sie wieder große und sehr vortheilhafte Wirkung in andere Körper. Erst überhaupt ist denen vollkommenen und lebendigen Kräften die sammelnde Kraft eigen, sie wirken durch einen sanften Zug in das, was ihre Kraft vergrößern, edler und feiner machen kann; indem sie die Zwischenräume der festen und flüßigen Theile mit ihrem Feuer ausdehnen, so ziehen sie sich selbst durch ihr kaltes Luftwesen zusammen, und

drin-

dringen also mit einer elastischen Kraft in alle auch die engesten Oefnungen ein. **Die sich vermehrende, vervielfältigende und durchdringende Eigenschaft**, nebst der *Elasticitæt* selbst, ist das vollständige Kennzeichen einer lebendigen Kraft. Die lebendige und vollkommene Kraft α) **des flüchtigmachenden** *Sulphuris*, befördert die aufsteigende Bewegung in allen Dingen, und erhält die natürliche Feuchtigkeit, und bewahret vor der Austrocknung, es lässet nichts zähe werden, und durch Austrocknung gerinnen; es erhält alles in der natürlichen Flüßigkeit. Das flüchtigmachende Leben befördert die genaue Vermischung des bindenden und färbenden mit flüßigen und festen. β) **Der wesentliche** *Sulphur* giebt Glanz, Farbe, Härte, und vermehret das vollkommene und reife Leben beständig, er erhält die natürliche Wärme, und den dichten mit Sammlung nach einem Centro verbundenen Zusammenhang, und lässet nichts durch innerliche Bewegung zerstöret oder aufgelöset werden, besonders widerstehet er der gährenden zerstörenden Bewegung, und erhält das Bestreben der Dinge nach allen Seiten gleich stark, und wenn die Kraft des belebenden Lebens (vitæ animantis) groß ist, so befördert sie die Bewegung der Dinge um ihre Axe, oder den Ausgang von dem Centro, und Rückgang nach denselben, welche man zusammen die Circulation nennet. γ) **Der bindende Lebensgeist** aber widerstehet am mächtigsten der faulenden Auflösung, er befördert das Niedersteigen der Mischungen, daher wird alles flüchtige dadurch figiret, alles flüßige wird feste, und ohne dieses Leben wird alles verzehret; es schwinden alle Kräfte, mit diesem Leben aber wird alles genährt und erhalten. Das niedersteigende Bestreben der Körper mit der Dichtigkeit der zusammenhängenden Theile, und ihrer Sammlung nach einem Centro, oder die natürliche Schwere der Körper, kömmt von wesentlichen und bindenden Sulphure zugleich.

§. 28.

§. 28.

Man kann die vollkommenen und lebendigen Kräfte §. 27. noch besser kennen lernen, wenn man sie mit denen mehr leidenden oder gar zerstörenden vergleicht.

I) Das Wasser und Salz des flüchtigmachenden Sulphuris ist allezeit mehr zerstörend, aber nicht seine färbende Erde.

II) Des bindenden Sulphuris Erde ist allezeit unvollkommen, aber der färbende Mercurius ist belebend.

III) In dem wesentlichen Sulphure ist alles wirksam, daher ihn der Herr **Becher** mit Rechte animam reliquorum principiorum genennet hat. In dem ursprünglichen Schwefel ist das Salz ungemein wirksam. Die Erde und das Brennbare dieses Salzes machen das Wesen des färbenden Sulphuris aus §. 22, 23. und also ist in dem wesentlichen Sulphure lauter Kraft und Leben.

IV) In dem ursprünglichen Sulphure finden wir alles vereiniget, was in den übrigen Grundmischungen abgesöndert ist. Das mehr leidende ist die Erde mit dem Wasser, als das gelindeste Wesen dieses Schwefels, und erscheint unter der Gestalt einer fetten zähen Erde, oder schleimichten Wassers, daher allezeit Brennbares bey diesem Theile des ursprünglichen Sulphuris ist. Das Salz in diesem Sulphure ist vollkommen, durchdringend, aber mäßig befeuchtend; hingegen das elementarische Feuer aus dem Salze dieses Sulphuris ist nicht allein lebendig, sondern auch sehr wärmend und trocknend.

V) Licht und Feuer, auch Brennbares, sind vollkommne, lebendige, sulphurische Kräfte der bindenden und flüchtigmachen-

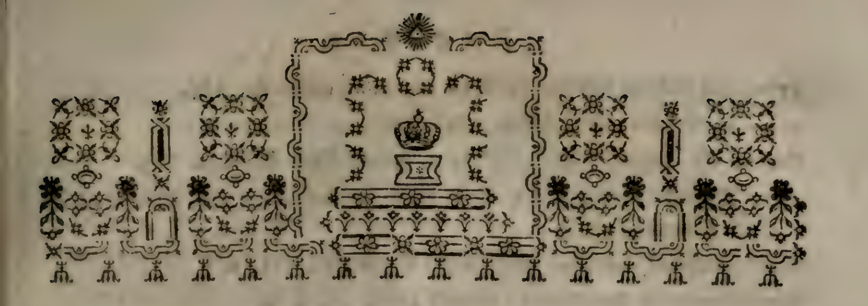
den Salze; die Luft aber ist ein Mercurius des sulphurischen Salzes.

VI) Das Wasser ist eine unvollkommene flüchtige Kraft des mercurialischen und sulphurischen Salzes zugleich.

VII) Die Erde eine unvollkommene fixe Kraft des bindenden Salzes.

Und also sind alle sogenannte Elemente vollkommene oder unvollkommene, sulphurische oder mercurialische, flüchtige oder fixe Kräfte der Salze §. 9.





Register

der merkwürdigsten Sachen im fünften Bande der philosophischen Abhandlungen.

Tar-

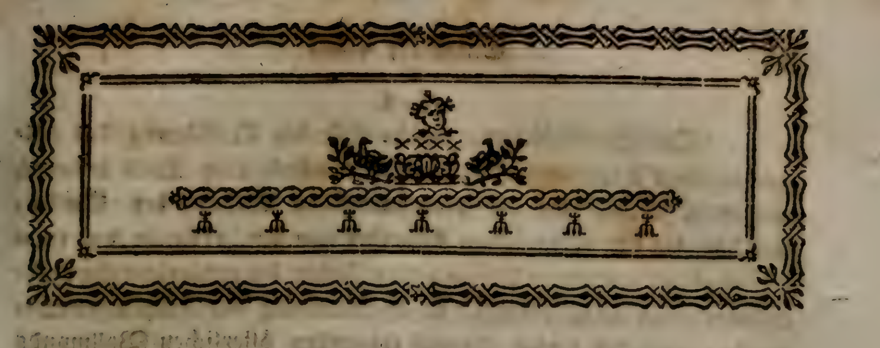


Pet. von Osterwald

Entwurf

einer neuen

Kalenderforme.



Eingang.

§. 1.

Ich wage es, eine neue Kalenderforme vorzuschlagen; und ich wage eben darum nichts geringes, weil dieser Gegenstand die ganze Christenheit angeht. Ich sage deswegen nicht viel neues; denn vor mir haben schon andere auf eben den Vorschlag gedacht, den ich machen werde. So viel ich aber weis; so ist keiner davon dem Grunde der Sache nahe genug getretten: darum sind auch ihre Vorschläge nicht in die Betrachtung gezogen worden, welche sie allerdings verdienet hätten. Unsere akademischen Gesetze wollen, daß sich die Mitglieder entweder um Erfindung neuer, oder um neue Anwendungen bekannter Wahrheiten bekümmern sollen. Sage ich hier nun nichts neues, so sind doch ganz gewiß meine Sätze neue Anwendungen bekannter Wahrheiten, die ich wenigstens mit solchen Gründen zu bestärken verhoffe, welche in Ansehung ihrer Gewißheit nicht den geringsten Zweifel zurück lassen werden.

§. 2.

Die Streitigkeiten, welche sich bey Einführung des gregorianischen Kalenders ereignet haben, sind aller Welt bekannt, und man weis, wie die protestantischen Stände des Reichs, nachdem sie den julianischen Kalender von An. 1582 an bis 1700 beybehalten, endlich in diesem letzten Jahre die gregorianische Jahresform zwar angenommen, in Bestimmung der Frühlingsnachtgleiche, und des nächst darauf folgenden österlichen Vollmonds aber alle cyclische Rechnungen verworfen, und dafür die astronomische nach den rudolphinischen Tafeln, auf den Meridian zu Uranienburg gerichtet, eingeführet haben.

§. 3.

Die Gründe, worauf diese Kalenderrechnung gegründet ist, sind zwar richtig. Die Herren Protestanten wollten dem Schluß des ersten allgemeinen nicänischen Concilii genau nachleben, welches die Osterfeyer auf den Sonntag nach dem ersten Frühlingsvollmond gesetzet hat.

Allein die astronomische Rechnung, welche sie erwählet haben, ist nicht jedermans Thun, der Kalender machet. Daher ist es auch gekommen, daß die Kirche von allen Zeiten her so viel auf die cyclischen Rechnungen gehalten hat, weil auch die Einfältigsten sich leicht darein zu finden wissen. a)

§. 4. Zudem

a) Das allgemeine Concilium zu Nicea hat an nichts weniger als an den astronomischen Calcul, den österlichen Vollmond zu bestimmen, gedacht. Die Väter nahmen vielmehr den metonischen Mondszirkel von 19 Jahren an, welcher auch hernach in der Kirche allezeit zur Berechnung des österlichen Vollmonds gedienet hat; so fehlerhaft er immer ist, wie wir unten mit mehrerm sehen werden.

§. 4.

Zudem sind die astronomischen Tafeln verschieden, weil eine jede das tropische Jahr bald größer bald kleiner annimmt, als die andere; und daher kömmt es auch, daß der Ort der Sonne, oder eines Planeten, den man z. E. nach den delahirischen Tabellen berechnet, um 6. 7. und mehr Minuten in der Zeit von derjenigen differiret, die man nach andern astronomischen Tabellen z. E. nach den caßinischen, lalandischen 2c. berechnet.

§. 5.

Hernach will der Schluß der protestantischen Reichsstände vom 23sten September 1699, daß der wahre Vollmond nach den rudolphinischen Tafeln zum Grund der Osterfeyer genommen werden solle; wo hingegen der gregorianische Kalender sich auf die mittleren Vollmonde gründet, die von den wahren um 5. 6. bis 12. Stunden, der Zeit nach, unterschieden seyn können.

§. 6.

Hierinnen scheint der gregorianische Kalender den Vorzug zu haben; indem gewiß ist, daß die Kirche von allen Zeiten her auf die mittleren Vollmonde, und nicht auf die wahren gesehen hat: da besonders in den ersten Zeiten die heutigen Centergleichungen nicht bekannt wären; die Juden auch in Berechnung ihrer Osterfeyer sich nach den mittlern, und nicht nach den wahren Vollmonden zu richten pflegen, wie die Einrichtung ihres Kalenders offenbar zu erkennen giebt. a)

A 3 §. 7. Und

a) Das nicänische Concilium kann auch nicht auf die wahren Vollmonde gesehen haben, weil dasselbe nach der obigen Anmerkung a zum 3. §. die neunzehnjährige cyclische Rechnung erwählet hat, nach welcher gewißlich keine andere als die mittlern Vollmonde verstanden werden konnten.

§. 7.

Und wozu sollte es dienen, oder was wäre man dadurch gebessert, wenn nun der wahre Vollmond für österlich gehalten würde, da sich derselbe zwar freylich in dem nämlichen Zeitpunkt, aber nicht allenthalben in gleicher Stunde ereignen kann? Wer kann verhindern, daß in dem Augenblick, wenn man zu Paris 4 Uhr zählet, zu Rom nicht 4 Uhr 41'. und zu Peckin in China 11 Uhr 37' gezählet werden müssen? Wenn demnach der wahre Vollmond zu Paris sich um 8 Uhr Samstag Abends nach dem Aequinoctio ereignete, so wäre der folgende Sonntag nach dem Schluß des Concilii Nicæni der Ostertag. Weil aber zu Peckin eben der Vollmond erst den Sonntag früh um 3. Uhr 37'. einfällt; so müßten die daselbstigen Christen, wenn sie sich genau an das nicänische Decret halten wollten, ihre Ostern 8. Tage später feyern, als die zu Paris: und das ist ganz gewiß die Absicht der allgemeinen Kirche niemal gewesen, die das Osterfest auf dem ganzen Erdboden an dem nämlichen Tage von allen Christen gefeyert wissen wollte.

Erster Abschnitt

Von den Fehlern des gregorianischen Kalenders.

§. 8.

Ich will darum die Fehler nicht rechtfertigen, die man bey der gregorianischen Kalendereinrichtung findet. Ueber diese Sache ist so viel geschrieben worden, daß es Eckel erwecken würde, wenn ich mich darüber umständlich herauslassen wollte. So viel ist aber

gewiß,

gewiß, daß selbst die Urheber dieser Einrichtung die Fehler davon nicht haben läugnen können. Man hat darinnen des Frühlings Aequinoctium auf den 21ten März fest zu setzen gedacht, a) welches doch nach der gregorianischen Intercalation zuweilen auf den 19ten zurück tritt, und zuweilen bis auf den 22ten März weiter hinaus geht. Gesetzt nun, der Vollmond fiele den Tag nach dem 19ten, nämlich den 20ten März ein, so wäre er in der That österlich, und gleichwohl könnte man ihn nach dem gregorianischen Kalender nicht dafür halten, weil er sich vor dem 21ten März ereignet, und das Osterfest müßte in solchem Falle erst vier Wochen hernach bey der folgenden Lunation gefeyert werden. Ein Exempel davon haben wir beym Jahre 1666. Da ereignete sich das Aequinoctium zu Rom den 2ten März um 9. Uhr, 20'. in der Frühe, und der mittlere Vollmond eben den Tag um 2. Uhr 17' Nachmittag. Er war also ganz gewiß österlich b), und weil der Sonntagsbuchstab in diesem Jahre C. war, der 20ten März aber den Buchstaben B. hat; so war dieser ein Samstag, folglich wäre der 21te März der wahre Ostertag gewesen. Nach dem gregorianischen Kalender aber wurde Ostern erst den 25ten April gefeyert, weil die Epacte 24. den Neumond im Märzen auf den 6ten, und folglich den Vollmond auf den 20ten wies, der, weil er vor dem 21ten fiel, nach dem gregorianischen System für keinen Ostervollmond

a) Die Urheber des gregorianischen Kalenders thaten dieses darum, weil sie meynten, das Aequinoctium wäre zu Zeiten des nicänischen Concilii am 21. März gestanden. Der astronomische Calcul zeiget aber, daß es sich im Jahre 325, wo dieses Concilium gehalten wurde, schon den Tag vorher, nämlich den 20ten März etliche Stunden Nachmittag begeben hat.

b) Um so mehr, da sich der wahre Vollmond 3. Stunde darnach ereignete.

mond gehalten wurde. Eben so ist es beym Jahre 2095. Denn da begiebt sich das Aequinoctium den 20ten März um 8. Uhr, 39 '. Vormittag, und der mittlere Vollmond eben den Tag um 10. Uhr Nachmittag: und weil in diesem Jahre der Sonntagsbuchstab B. ist, so dem 20ten März zukömmt, so müßte Ostern 8. Tage darnach, nämlich den 27ten März, gefeyert werden. Nach den gregorianischen Kalender aber fällt der österliche Vollmond in diesem Jahre auf den 19ten April, und Ostern auf den 24sten.

§. 9.

Noch ein anderer Fehler steckt in den gregorianischen Epakten, die den mittleren Vollmond zuweilen um einen Tag später weisen, als er sich wirklich zuträgt: fällt nun z. E. solcher Vollmond auf einen Samstag, und die Epakte zeigt auf den Sonntag, so wird Ostern um 8 Tage später gefeyert, als es seyn sollte. Ein Beyspiel hievon haben wir beym Jahre 1724. Denn da fiel das Aequinoctium zu Rom auf den 22sten März um 10. Uhr, 38 '. Vormittag, und der nächst folgende mittlere Vollmond auf den 8ten April um 1. Uhr 26 '. Nachmittag. Der Sonntagsbuchstab in diesem Jahre war nach den Schalttag A: und weil der 8te April G. hat; so war er dießmal ein Samstag: folglich hätte Ostern, dem nicänischen Kirchenschlusse zu Folge, den folgenden 9ten April gefeyert werden sollen. Nun gehe man in den gregorianischen Kalender, so finden wir zu der goldnen Zahl 15. im Epaktenzirkel, die Epakte 4.; diese (nach der gregorianischen Epakteneinrichtung) von 30 abgezogen geben den Tag des Neumonds im Märzen nämlich den 26: wenn man hierzu 14 thut, so kömmt man mit dem Vollmonde auf den 9ten April: weil aber derselbe ein Sonntag war, so mußten die Katholischen ihre Ostern 8. Tage darnach halten.

An. 1744.

An. 1744. fiel der österliche mittlere Vollmond den 28ten März um 2. Uhr, 44'. Nachmittag. Dieß war ein Samstag, weil der 28te März C hat, der Sonntagsbuchstab aber dießmal D. war; Ostern hätte demnach den 29ten März seyn sollen. Wir Katholischen feyerten sie aber erst 8. Tage darnach, weil unsere gregorianische Epakte 15. den Vollmond auf den 29ten selbst zeigte, der nicht gelten konnte, weil er ein Sonntag war.

Jedoch genug von den sichtbaresten Fehlern des gregorianischen Kalenders; wir wollen nun von unserer neuen Kalenderforme reden.

Zweyter Abschnitt.

Von der Einschaltungsart des neuen corrigirten Kalenders.

§. 10.

Schon zu den Zeiten, da die Protestanten ihren Kalender einrichten wollten, schlugen einige aus ihnen die gelaleische Art einzuschalten vor, da man nämlich sechsmal nach einander im 4ten Jahr, und das siebente mal im 5ten Jahre einen Tag einschalten sollte; a) dieß hätte einen Zirkel von 29 Jahren abgegeben. Andere wollten, man sollte siebenmal nach einander im 4ten, und das achte mal im 5ten Jahre einschalten, wordurch ein Zirkel von 33. Jahren entstehet. Wiederum andere meynten, man

Oo 2 sollte

a) Diese Einschaltungsart hat ihren Namen vom persischen Sultan Gelal. Die Persianer haben im Jahre 1079 angefangen, sich derselben zu bedienen.

sollte beyde Cylcos mit einander auf gewisse Art combiniren. Die protestantischen Reichsstände verwarfen aber alle diese Vorschläge, weil sie meynten, daß sie so lange impracticabel wären, als man die wahre und eigentliche Größe des tropischen Jahres nicht genau wußte. Sie erwählten die astronomische Rechnung, ohne zu bedenken, daß diese eben auch hypothetisch ist, und sich auf eine voraus gesetzte Größe des tropischen Jahres gründet.

§. 11.

Wenn man aber den Sachen recht auf den Grund gesehen hätte, so würde man gefunden haben, daß diejenigen, welche den 33jährigen Zirkel vorschlugen, dem Ziel sehr nahe tratten. Ich werde im folgenden überzeugend darthun, daß es in der Welt keine bequemere Art einzuschalten als diese giebt, welche nicht nur mit dem Himmel am besten übereinstimmt, das Aequinoctium an dem nämlichen bürgerlichen Tage erhält, und zugleich die Kalenderrechnung überaus bequem und leicht, und weit leichter als die gregorianische machet; man mag nun aus den verschiedenen Systemen des tropischen Jahres erwählen, welches man immer will.

§. 12.

Denn nach diesen verschiedenen Systemen enthielte das größte tropische Jahr 365 Tage, 5 St. 49 Min. und 20 Secunden, das kleinere aber 365 Tage, 5 St. 48 Min. 45 Secund. a) nehmen wir zu erst das größte von 365 Tagen, 5 St. 49 Min. 20 Sec. so machen diese in 33 Jahren so viel complete gemeine Jahre zu 365 Tagen, und darüber 8 Tage, und 8′. Und 33 corrigirte Jahre machen aus 33 gemeine Jahre, 8 Tage, folglich differiret

a) Sieh des Herrn Lalands Astronom. Lib. IV. §. 588.

feriret ein solcher 33jähriger Zirkel von eben so viel tropischen Jahren blos um 8. Minuten. Nehmen wir jetzt das kleinste tropische Jahr von 365 Tagen, 5 St. 48′. 45″. so machen 33 derselben eben so viel gemeine Jahre, und 8 Tage weniger 11′. 15″. um welche dieselbe von 33. corrigirten bürgerlichen Jahren differiren. Man mag also aus den bisherigen Observationen eine Größe des tropischen Jahres annehmen, welche man immer wolle; so betraget der Unterschied in 3 Jahren nicht über 1. Minute, folglich in 4000 Jahren nicht über einen ganzen Tag.

§. 13.

Berechnet man hingegen den Zirkel von 29 Jahren, worinnen 7 Tage eingeschaltet würden; so ergiebt sich ein Unterschied von 50′. 40″. um welche dieselben kleiner sind, als 29 tropische Jahre, wenn man das größte derselben zu 365 Tagen, 5 Stunden, 19′. 20″. annimmt. Nimmt man aber das kleinste zu 365 Tagen, 5 Stunden, 18′. 45″. so beträgt der Unterschied doch noch 33′. 45″. Bey einem noch kleineren Zirkel z. E. von 25 Jahren würde der Unterschied noch größer werden.

§. 14.

Vergleichen wir nun auch einen größeren Zirkel z. E. von 37 Jahren, worinnen 9 Tage eingeschaltet würden, mit 37 der größten tropischen Jahren, so sind jene um 34′. 40″. und gegen 37 der kleinsten tropischen Jahren gehalten um 56′. 15″. zu groß: und um desto größer würde der Unterschied ausfallen, je größer man den Zirkel annehmen wollte. Es ist demnach eine ausgemachte Wahrheit, daß kein anderer einfacher Zirkel von bürgerlichen Jahren der astronomischen näher tretten könne, als der 33jährige, wenn auch die eigentliche und wahre Größe des tropi-

schen Jahres bis auf eine halbe Secunde nahe bekannt wäre, welches man erst nach 5 biß 600 Jahren erleben wird.

§. 13.

Wir wollen einsweilen die Größe des tropischen Jahres zu 365 Tagen, 5 Stunden, 49 '. annehmen, wie die Urheber des gregorianischen Kalenders gethan haben, so machen 33 solche Jahre, 33 gemeine Jahre zu 365 Tagen gerechnet, 7 Tage, 23 Stunden, und 57 Minuten; weil nun unser corrigirter Jahreszirkel 33 gemeine Jahre und 8 Tage enthält, so ist er um 3 Minuten größer als 33 tropische Jahre, folglich geht das Aequinoctium nach Verfluß eines Zirkels um 3 Minuten zurück, welches erst in 15800 Jahren einen ganzen Tag ausmachen würde, wenn das tropische Jahr haargenau so viel austrüge, als wir angenommen haben.

Dritter Abschnitt.

Wie im corrigirten Kalender die Sonntagsbuchstaben für jedes gegebene Jahr zu finden.

§. 14.

In unserm Zirkel sind also das 4te, 8te, 12te, 16te, 20te, 24te, 28te und 33te Schaltjahre: wenn man also wissen will, ob ein vorgegebenes Jahr, vom Anfange des 1ten Zirkels angerechnet, ein Schaltjahr oder ein gemeines sey, so dividiret man es mit 33, wenn sich das, was nach der Division übrig bleibt, geradeauf mit 4 dividiren läßt, so ist das vorgegebene Jahr ein Schaltjahr, 32 allein ausgenommen, welches in unserm Zirkel ein gemeines Jahr ist.

§. 15. Weil

§. 15.

Weil 33 Jahre unsers Zirkels 33 gemeine Jahre zu 365 Tagen, das ist über die completen Wochen, noch 33 Tage, und 8 Schalttage, zusammen 41 Tage, oder 5 complete Wochen und 6 Tage ausmachen, so geht der Jahresanfang nach 33 Jahren um um 1 Tag zurück, folglich der Sonntagsbuchstab um einen weiter vor sich, so daß, wenn das erste Jahr im Zirkel den Sonntagsbuchstab A. gehabt hätte, so würde das 1ste im 2ten Zirkel den Sonntagsbuchstaben B. haben. Dieß giebt nun eine überaus leichte Berechnung der Sonntagsbuchstaben, welche die julianische sowohl als die gregorianische gar weit übertrift, wie wir bald sehen werden.

§. 16.

Wir wollen die Epoche unserer Jahreszirkel auf das 1600te der gemeinen Zeitrechnung setzen, so daß das Jahr 1600 für das 0 Jahr derselben gehalten werde. In diesem Jahre war der Sonntagsbuchstab *nach dem Schalttage* A. Wenn man demnach den Sonntagsbuchstaben für ein gegebenes Jahr finden will, so zieht man erstlich 1600 davon ab. 2) Was übrig verbleibt, dividiret man mit 33, so zeigt der Quotient an, wie viel Zirkel von An. 1600 verflossen sind, folglich um wieviel der Sonntagsbuchstab weiter vor sich gegangen ist. (§. 15.) 3) Was nach der Division mit 33 übrig verbleibt, zeigt das laufende Jahr im Zirkel und zugleich an, wieviel Jahre über die completen Zirkeln von An. 1600 an bis auf das gegebene Jahr verflossen sind: weil nun der Sonntagsbuchstab nach einem gemeinen Jahr um 1, und nach einem Schaltjahre um 2 zurück geht; so sehe man, wieviel Schalt-

jahre im Ueberreste stecken, a) so viel addire man dazu; so zeigt die Summe an, um wieviel der Sonntagsbuchstab zurück gegangen ist. 4) Diese Zahl ziehe man von dem Quotienten, oder diesen von jener ab, so zeigt der Rest, um wie viel der Sonntagsbuchstab entweder vor sich, oder zurück gegangen. Ist der Quotient größer, so ist er um so viel vor sich gegangen, als beyde Zahlen von einander differiren; ist aber der Quotient kleiner, so ist er um so viel zurück gegangen: man wirft demnach 7 so oft davon weg, als sich thun läßt, so giebt die verbleibende Zahl den Rück- oder Vorgang der Sonntagsbuchstaben.

§. 17.

Nun ordne man die Buchstaben folgender Gestalt:

0	6	5	4	3	2	1	0
A	B	C	D	E	F	G	A
0	1	2	3	4	5	6	0

wo die untern Zahlen den Vorgang, und die obern den Zurückgang der Sonntagsbuchstaben anzeigen; so wird man gleich finden, welcher Sonntagsbuchstab dem gegebenen Jahre zukomme. Wenn dasselbe ein Schaltjahr ist, so gilt der gefundene Buchstab nach den Schalttage, das ist vom 25ten Febr. an bis zu Ende des Jahres, und der nächstfolgende Buchstab gilt vor dem Schalttage, nämlich von dem ersten Jänner an bis auf den 24 Febr.

---

a) Wenn der Ueberrest aus lauter gemeinen Jahren bestünde, so würde der Sonntagsbuchstab um so viel zurück gegangen seyn, als Einheiten darinen stecken. Bey jedem Schaltjahre aber geht er noch weiter um einen Tag zurück;

Febr. denn dieser ist der Schalttag, welcher mit dem folgenden 25ten Febr. einerley Buchstaben führet.

§. 8.

Man fragt z. E. was das 1769ste Jahr im corrigirten Kalender für einen Sonntagsbuchstaben habe:

so zieht man von	1 7 6 9	
	1 6 0 0	ab. (§. 16. n. 1.)
Verbleiben	1 6 9	5 Quotient.
Dividiret mit 33.	1 6 5	§. 16. n. 1.
Ist der Ueberrest	4	ein Schaltjahr.
darinn sind Schaltj.	1	(§. 16. n. 3.)
Thut	5	diese
Vom Quot.	5	abgezogen.
Verbleibt	0	

Also ist der Sonntagsbuchstab A, welcher nach dem Schalttage und B. vor demselben gilt.

Oder das Jahr	1 7 6 4	
	1 6 0 0	
	1 6 4	4 Quotient.
	33 1 3 2	
Verbleiben	3 2	ein gemein Jahr.

Ver-

---

rück; folglich ist klar, daß man zu dem Ueberrest so viel Einheiten hinzuthun müße, als Schaltjahre darinen stecken, um zu wissen, wieviel der Sonntags-Buchstab von dem letzten Jahre an des nächst vorher completirten Zirkels zurück gegangen ist.

Verbleiben 3 2 ein gemein Jahr
darinn sind Schaltj. 7

Thut 3 9 Tage.
Den Quotient. 4 abgezogen,

Verbleiben 3 5 Tage zurück.
Weggeworfen
7 fünfmal, oder 3 5

Verbleibt 0

Also ist der Sonntagsbuchstab A. das ganze Jahr hindurch.

wiederum das Jahr 1 7 6 2
1 6 0 0

1 6 2 4 Quotient.
3 3 1 3 2

Verbleibt 3 0 ein gemein Jahr.
darinn sind Schaltj. 7

Thut 3 7
Den Quotient. 4 abgezogen.

Verbleiben 3 3
Weggeworfen
7 viermal thut 2 8

Verbleibt 5 zurück E.

Oder das Jahr 1 7 7 0
1 6 0 0

1 7 0 5 Quotient.
3 3 1 6 5

Verbleibt 5 ein gemein Jahr

Sind

Sind verblieben	5	
Darunter Schaltj.	1	
Thut	6	Tage.
	5	Quotient.
	1	Zurück G.

§. 19.

Und diese Berechnung geht 1) auf ewige Zeiten fort, wo hingegen im gregorianischen Kalender alle hundert, bisweilen zwey hundert Jahre, eine neue Ordnung des Sonnenzirkels gemacht werden muß. Unsere Rechnung der Sonntagsbuchstaben setzt 2) nichts vor aus, sondern gründet sich nur auf den 33jährigen Zirkel, die gregorianische hingegen nimmt das erste Jahr der gemeinen Zeitrechnung für das 10te des Sonnenzirkels an: man muß also zum gegebenen Jahre 9 addiren, und die Summe mit 28 dividiren, alsdann zeigt der Ueberrest an, was das vorgegebene für ein Jahr im Sonnenzirkel sey, und dieß muß erst in demjenigen Sonnenzirkel, der für das gegebene Jahrhundert gilt, aufgesuchet werden, um den ihm zukommenden Sonntagsbuchstaben zu finden. Selbst im julianischen Kalender wird ein solcher Sonnenzirkel erfordert, wiewohl er da beständig ist. In unserm System aber braucht es gar keinen 28jährigen Zirkel, um die Sonntagsbuchstaben zu finden, sondern die blosse Stellung der 7 Buchstaben.



Vierter Abschnitt.

Wie im corrigirten Kalender die Zeit des Frühlings-Æquinoctii für jedes gegebene Jahr zu finden.

§. 20.

Außer dem, daß man den Sonntagsbuchstaben für ein jedes gegebenes Jahr, nach unserer Wochenreyhe, finden muß, wird noch im christlichen Kalender erfordert, daß man die Zeit der Frühlingsnachtgleiche, und des nächst darauf folgenden Vollmondes genau bestimme, weil, wie gedacht (§. 2.), der Schluß des allgemeinen Concilii zu Nicäa dahin geht, daß Ostern allezeit an dem Sonntage nach dem Vollmond, welcher zu nächst auf das Frühlings-Aequinoctium folget, gefeyert werden soll.

§. 21.

Der gregorianische Kalender setzet dieses Æquinoctium beständig auf den 21ten März: wir haben aber schon oben gezeiget, (§. 8.) daß es zuweilen auf den 19ten und hingegen auch zuweilen auf den 22ten März fällt. Die gregorianische Epakte zeiget auch den Vollmond nur auf ganze Tage, und zwar öfters einen Tag später an, als er sich wirklich ereignet. Nach unserer Kalenderforme aber lassen sich beyde, das Frühlingsäquinoctium sowohl, als der mittlere Ostervollmond auf Stunden und Minuten bestimmen, folglich kann nach solcher das wahre Osterfest niemal verfehlet werden, und man hat gleichwohl dabey keine astronomische sondern eine blosse cyclische Rechnung nöthig. Wir wollen erstlich

lich sehen, wie die wahre Zeit des Frühlings=Æquinoctii zu fingen sey.

§. 21.

Im Jahre 1600 ereignete sich dasselbe zu Paris nach den delahirischen Tabellen den 20ten März um 8 Uhr, 44′ 40″ Vormittag; und weil der Unterschied der Meridianen zwischen Rom und Paris 41′ 20″ beträgt; a) so hat das Frühlings Aequinoctium im Jahre 1600 zu Rom den 20ten März um 9 Uhr 26′ in der Frühe, oder, nach der astronomischen Zeit, den 19ten März um 21 Uhr 26′ sich zugetragen.

§. 22.

Weil nun das tropische Jahr 365 Tage, 5 Stunden, 49′ enthält; (§. 13.) so ereignet sich das Frühlings=Æquinoctium um 5 Stunden, 49 Min. später im folgenden, als im vorhergegangenen Jahre. Wenn es z. E. in einem Jahre den Nachmittag um 2 Uhr einfällt; so trägt es sich im folgenden Jahre um 7 Uhr, 49′ Nachmittag zu, wohl verstanden, wenn alle beyde gemeine Jahre sind. Dieß thut in 5 gemeinen Jahren einen Tag, 5 Stunden, 5′; in 9 Jahren 2 Tage, 4 Stunde, 21′; in 13 Jahren 3 Tage, 3 Stunde, 37′ ꝛc. wenn man voraus setzet, daß alle diese Jahre zu 365 Tagen wären. Gleichwie aber in 5 Jahren ein Tag, in 9 Jahren zween Tage, in 13 Jahren drey Tage ꝛc. eingeschaltet werden; so ist klar, daß, wenn man die Schalttage wegwirft, allezeit das Aequinoctium auf den nämlichen Tag fallen müsse, an welchem es im Anfange unserer Æræ gestanden,

Pp 3 und

a) Sieh des Herrn Cassini astronomische Tabelle. p. 6.

und daß nur die Stunden und Minuten übrig bleiben, die durch die Multiplication heraus kommen.

§. 23.

Wenn man demnach für ein jedes gegebenes Jahr die Zeit des Frühlings-Æquinoctii bestimmen will; so zieht man 1600 wie oben (§. 16.) davon ab; den Ueberrest dividiret man mit 33. Was nach der Division übrig verbleibt, multipliciret man mit 5 Stunden, 49 Min. oder 349 Min. Das Produkt giebt so viel Minuten, die man zu Stunden, und diese zu Tagen machet: das ist, man dividiret das Produkt mit 60, und den heraus kommenden Quotienten mit 24. Was an Stunden und Minuten über die weggeworfenen ganzen Tage übrig bleibt, das addiret man zu 19 Tagen, 21 Stunden, 26 Minuten, so zeigt die Summa den Tag, die Stunde und Minute im Märzen an, an welchem sich das Aequinoctium im vorgegebenen Jahre ereignet.

§. 24.

Man fraget z. E. an welchem Tage, Stunde und Min. das Frühlingsäquinoctium im Jahre 1762 sich zu Rom begiebt;

so zieht man von	1 7 6 2		
das 0 Jahr der Æræ	1 6 0 0	ab.	
Verbleiben	1 6 2	}	4 Quotient.
Dividiret mit 33 —	1 3 9		
Verbleiben	3 0		

Mi-

Minuten	3 4 9	
Multipliciret	3 0	
Geben ein Produkt	1 0 4 7 0	Minuten.
Man dividire	1 0 4 7 0	174 Stunden.
mit 60.	4 2 (3 0	
mit 2 4	1 7 4	7 Tage.
	1 6 8	
	6	Stunden.

Hier haben wir also über 7 Tage noch 6 Stunden und 30 Minuten. Man addire also

zu 19 Tagen	21 St.	26 Min.
	6 St.	30 Min.

so kommen heraus 20 T. 3. St. 56 Min. folglich ergiebt sich das Aequinoctium den 20ten März um 3 Uhr, 56 '. Nachm.

§. 25.

Wenn das vorgegebene Jahr ein Schaltjahr ist; so nimmt man von der gefundenen Zeit 1 hinweg.

Wir wollen z. E. das 1760 Jahr nehmen: so haben wir folgenden Calcul.

	1 7 6 0	
	1 6 0 0	
	1 6 0	4 Quot.
3 3	1 3 2	
Verbleiben	2 8	

Min.	3 4 9	
Multipliciret mit	2 8	
	2 7 9 2	
	6 9 8	Min.
Summa	9 7 7 2	162 Stunden.
Dividiret mit 6 0	3 1 5 2	
	1 6 2	6 Tage.
mit 2 4	1 4 4	
	1 8	Stunden.

19 T.	21 St.	26 '.
—	18	52 '.
20 T.	16 St.	18
1		
19	16	18

Also ergiebt sich in diesem Jahre das Aequinoctium zu Rom den 19ten März um 16 Uhr 18 '. astronomischer Zeit, das ist, den 20ten März um 4 Uhr 18 '. Frühe.

§. 26.

Will man aller Rechnung überhoben seyn: so darf man sich nur folgender Tabelle bedienen, welche durch die blosse Addition entspringt; da man immer zu der vorhergehenden Zeit 6 Stunden addiret, und bey jedem Schaltjahre einen Tag hinweg wirft.

Laufen-

Laufendes Jahr im Zirkel.		Tag des Æquinoctii im Märzen.		Uhr	M.
Schaltj.	0	20	Vormit.	9	26
	1	—	Nachmit.	3	15
	2	—	Nachmit.	9	4
	3	21	Vormit.	2	53
Schaltj.	4	20	Vormit.	8	42
	5	—	Nachmit.	2	31
	6	—	Nachmit.	8	20
	7	21	Vormit.	2	9
Schaltj.	8	20	Vormit.	7	58
	9	—	Nachmit.	1	47
	10	—	Nachmit.	7	36
	11	21	Vormit.	1	25
Schaltj.	12	20	Vormit.	7	14
	13	—	Nachmit.	1	3
	14	—	Nachmit.	6	52
	15	21	Vormit.	12	41
Schaltj.	16	20	Vormit.	6	30
	17	—	Nachmit.	12	19
	18	—	Nachmit.	6	8
	19	—	Nachmit.	11	57
Schaltj.	20	—	Vormit.	5	46
	21	—	Vormit.	11	35
	22	—	Nachmit.	5	24
	23	—	Nachmit.	11	13

Laufendes Jahr im Zirkel.		Tag des Æquinoctii im Märzen.		Uhr	M.
Schaltj.	24	20	Vormit.	5	2
	25	—	Vormit.	10	51
	26	—	Nachmit.	4	40
	27	—	Nachmit.	10	29
Schaltj.	28	—	Vormit.	4	18
	29	—	Vormit.	10	7
	30	—	Nachmit.	3	56
	31	—	Nachmit.	9	45
	32	21	Vormit.	3	34
Schaltj.	33	20	Vormit.	9	23

§. 27.

Z, E, Man woll; geschwind in der Tabelle den Tag, die Stund und Minute des Frühlingäquinoctii für das Jahr 1760 finden, so sucht man den Ueberrest nach der Division (§. 23.) unter den laufenden Jahrn des Zirkels; dieser Ueberrest, welcher das laufende Jahr andeutet, ist 28, daneben steht der 20te März Vormittags, 4 U. und 18 Min. Dieß ist also die Zeit des Frühlingsäquinoctii im Jahre 1790 zu Rom, eben wie wir sie hieoben heraus gebracht haben.

§. 28.

Sie ist es aber doch nicht ganz genau; denn weil wir oben (§. 13.) gesehen haben, daß der 33jährige Zirkel um 3 Minuten größer ist, als 33 tropische Jahre, folglich das Aequinoctium nach

Ver=

Verfluß eines jeden Zirkels um 3 Minuten zurück geht; so muß man, um die Zeit des Aequinoctii ganz genau zu haben, den Quotienten mit 3 multipliciren, und das Product von der vermög der Rechnung, oder in der Tabelle gefundenen Zeit abziehen, da dann der Rest die wahre Zeit des Aequinoctii auf das genaueste zeiget.

§. 29.

Z. E. Wir haben die Zeit des Aequinoctii Ao. 1760 heraus gebracht auf den 20ten März Vormit. um 4 U. 18 Min. (§. 27.) Nun ist der Quotient 4: diese mit 3 multipliciret, geben 12. Diese von 4 U. 18 Min. abgezogen, verbleiben 4 U. 6 Min. Vormit. zur wahren und genauen Zeit des Aequinoctii zu Rom den 20ten März im Jahre 1760. Zieht man hiervon die differentiam Meridianorum zwischen Rom und Paris ab mit 41 Min. 20 Sec.; so ergiebt sich die Zeit des Aequinoctii zu Paris um 3 U. 24′. 40″ und dieß trift mit der in den Ephemeriden des Herrn De la Caille, p. 137 angegebenen Zeit, bis auf 1′ 40″ nahe, genau zusammen. Unsere cyklische Rechnung zeiget also die Zeit des Aequinoctii oben so genau und scharf an, als die astronomische immer thun kann.

§. 30

Wenn man unsere Tabelle genau betrachtet; so wird man finden, daß das Aequinoctium darinnen allezeit zwischen dem 20ten März 4 U. 18′. und dem 21ten 3 U. 34′. fällt, folglich in dem Zeitraume einer astronomischen Tagszeit erhalten wird. Und hieraus veroffenbaret sich ebenfalls der Vorzug unserer Einschaltungsart gegen der gregorianischen, wo das Aequinoctium zwischen einem

Zeitraume von 3 Tagen fallen kann, wie wir schon oben gesehen haben. (§. 8.) Denn es kann geschehen, daß eben der Tag, welcher in unserm corrigirten Kalender der 20te März heißt, im gregorianischen der 19te ist, und alsdann kann das Aequinoctium auf diesen Tag um 4 U. 18′ in der Frühe fallen. Zuweilen wird aus dem 21ten März in unserm corrigirten Kalender der 22te im gregorianischen, und da kann das Aequinoctium auf den 22ten März um 3 U. 34′. in der Frühe fallen. Zwischen 4 U. 18′. den 19ten in der Frühe, und 3 U. 34′ den 22ten in der Frühe sind bis auf etliche Minuten nahe 72 Stunden, das ist 3 ganze astronomische Tage.

§. 31.

Aber weiter hinaus kann es auch nicht fallen, weil der gregorianische Kalender von dem unsrigen in ganzen 8448 Jahren niemal um mehr als einen Tag differiren kann, wie wir unten mit mehrerm sehen werden. Der Freyh. v. Wolf thut also dem gregorianischen Kalender groß Unrecht, da er in seinen Anfangsgründen der Chronologie §. 313. vorgiebt: es könnte nach der gregorianischen Intercalation das Aequinoetium zuweilen auf den 23ten März hinaustreten. Der Jesuit Clavius, der vornehmste Mitarbeiter am gregorianischen Kalender, ist selbst in diesen Irrthum gefallen, der sich einbildete, das Aequinoctium könnte zuweilen gar auf den 24ten März fallen.

§. 32.

Es ist zwar wahr, daß in 8448 Jahren, von 1600 an gerechnet, nach dem gregorianischen Kalender um einen Tag mehr eingeschaltet wird, als nach dem unsrigen. Denn nach diesem werden in 8448 Jahren 2048 Tage eingeschaltet, nach dem grego-

riani-

lianischen aber 2049. Und so werden in 25344 Jahren um 2 Tage, in 42240 Jahren um 3 Tage, in 59136 Jahren um 4 Tage ꝛc. mehr eingeschaltet nach dem gregorianischen Kalender, als nach dem unsrigen: denn 8448 Jahre, mit 33 dividiret, geben geradeauf 256 Zirkeln; in jedem Zirkel werden 8 Tage eingeschaltet, folglich in 256 Zirkeln 2048 Tage.

Nach dem gregorianischen Kalender werden in 400 Jahren dreymal 24, das ist 72, und einmal 25, zusammen also 97 Tage eingeschaltet. Wenn man also folgende Analogie machet: 400 geben 97, wieviel geben 8400; so kommen heraus 2937 Tage. Setzet man hierzu die 12 Tage, welche in 48 Jahren intercaliret werden; so bekommen wir zur ganzen Einschaltung in 8448 Jahren nach dem gregorianischen Kalender 2049 Tage, folglich um einen Tag mehr, als nach unserm corrigirten Kalender. Und so ergiebt sichs von selbsten, daß in 25344 Jahren 2 Tage, und in 42240 Jahren 3 Tage ꝛc. mehr eingeschaltet werden, nach dem gregorianischen Kalender, als nach dem unsrigen.

§. 33.

Eben so wirft es sich auch aus der Sonntagsbuchstabenrechnung der beyderseitigen Kalender heraus. Nehmen wir das Jahr Christi 10048, so ist dieses das 5te im gregorianischen der ersten Ordnung.

Denn man ziehe von 100 Sæculis 16 ab, so verbleiben 84: Man dividire 84 mit 28, a) so bleibt nichts übrig; folglich gehöret

 dieses

a) Um die Ordnung der Sonntagsbuchstaben zu finden, welche einem jeden gegebenen Jahrhundert nach dem gregorianischen Stylo zukömmt, kann folgende Regel dienen: 1) Man ziehe von dem gegebenen Jahrhundert 15 ab, Wenn

dieses Säculum unter die erste Ordnung der Sonntagsbuchstaben, worunter auch das 17te Säculum gehöret.

Nun

---

wenn es ein gemeines ist, und 16, wenn es ein Schaltjahrhundert ist, welches sich nämlich durch 4 geradeauf dividiren läßt. 2) Den Ueberrest dividiret man mit 28. 3) Wenn nach der Division nichts übrig bleibt, so gilt die erste Ordnung, und wenn 18 übrig bleiben, die siebente. 4) Wenn aber 5. 6. 7. 8. 14. 15. 16. 17. 22. 24. 25. übrig bleiben; so wirft man 1 hinweg; bleiben aber 26 oder 27 übrig: so nimmt man 2 davon weg. 5) Vom verbleibenden zieht man 9 oder 18 ab; so zeigt die überreßige Zahl die Ordnung der Sonntagsbuchstaben, welche für das gegebene Säculum gilt.

Es fragt sich z. E. was für eine Ordnung der Sonntagsbuchstaben dem Jahrehundert 2300 zukomme?

```
          2 3
          1 5
        ───────
28        8 } 0
          1 }
        ───────
          7    Die siebente.

Für das Jahr   1 6 0 0   Ein Schaltjahrhundert
               1 6
             ───────
2 8            4 0 } 1
               2 8 }
             ───────
               1 2
                 9
             ───────
                 3    Die dritte.
```

Wenn

Nun setzen wir 9 zu dem gegebenen 10048ten Jahr, und dividiren die Summe mit 28, so zeiget der Ueberrest 5 das laufende Jahr im Sonnenzirkel an.

Dieses

Wenn man nun weis, zu was für einer Ordnung das vorgegebene Jahrhundert gehöret, so läßt sich der Sonntagsbuchstab für ein jedes Jahr im Sonnenzirkel leicht finden. Man setzet vom Sonntagsbuchstaben der ersten Ordnung in gerader Reyhe so viel Buchstaben fort, als die gefundene Ordnung von der ersten differiret. Setzen wir die erste Ordnung hieher, die für die Säcula 1500 und 1600 im gregorianischen Stylo gegolten hat.

1	C B	5	E D	9	G F	13	B A	17	D C	21	F E	25	A G
2	A	6	C	10	E	14	G	18	B	22	D	26	F
3	G	7	B	11	D	15	F	19	A	23	C	27	E
4	F	8	A	12	C	16	E	20	G	24	B	28	D

Fragt man nnn z. E. was das Jahr 2246 für einen Sonntagsbuchstaben habe? so sucht man vorher nach den oben gegebenen Regeln, die Ordnung der Sonntagsbuchstaben, welche von An. 2200 bis 2300 gilt.

22
15
―――
28) 7 } 0
1
―――
6

Wir haben also hier die 6te Ordnung.

Nun suche man, das wievielte Jahr 2246 im Sonnenzirkel ist.

2246

Dieses fünfte Jahr, weil es ein Schaltjahr ist, hat die Sonntagsbuchstaben E D.

Nach

```
        2246
           9
       ------
  28)   2255 ] 80
        224  ]
       ------
          15
```

Wir haben demnach das 15te Jahr im Sonnenzirkel, welches in der ersten Ordnung den Buchstaben F giebt. Man setze itzt die Buchstaben von F angefangen in einer geraden Reyhe fort, bis man auf den 6ten kömmt.

F	G	A	B	C	D
1	2	3	4	5	6

Also ist der Sonntagsbuchstab fürs Jahr 2246, nach dem gregorianischen Stylo D.

Wir wissen unsers Behalts nicht, daß jemand auf diese leichte und allgemeine Methode gefallen wäre, die Sonntagsbuchstaben für ein jedes gegebenes Jahr, ohne Tabellen, aus der bloßen ersten Ordnung zu finden. Wer Lust hat, den Grund unserer Regeln einzusehen, der darf sich nur die 7 Ordnungen der Sonntagsbuchstaben vorstellen, und die Jahre bis auf weit entfernte Jahrhunderte darunter bringen. Wir entübrigen uns um so mehr, hierinnen weitläuftiger zu seyn, da wir unten §. 68. eine weit leichtere und kürzere Methode angeben werden, wonach die gregorianischen Sonntagsbuchstaben für ein jedes gegebenes Jahr ohne alle Sonnenzirkel und Buchstabenordnungen gefunden werden können.

Nach unserer Sonntagsbuchstaben-Rechnung haben wir folgenden Calcul. (§. 17.)

	10048		
	1600		
33)	8448	7)	256 ⎫ 36
	66		21 ⎭
	184		46
	165		42
	198		4 Vorwärts. E.
	198		
	— Ein Schaltjahr.		

Die Sonntagsbuchstaben sind also F E. Der 24te März nach unserm Kalender wäre demnach der 23te nach dem gregorianischen.

§. 34.

Allein dieses beweist sonnenklar, daß das Aequinoctium niemal über den 22ten März nach dem gregorianischen Stylo hinaustretten könne; sondern vielmehr nach 8448 Jahren um einen Tag, nach 25344 Jahren um zween Tage zurück gehen müsse, um so mehr, da es noch überhin auch nach unserm corrigirten Kalender alle 33 Jahre um 1 Min. zurück tritt. (§. 13.) a)

Fünf-

a) Und was ist dann am Ende daran gelegen, ob das Aequinoctium auf den 18ten, 19ten, oder 20ten März fällt, wenn man nur die Zeit, wann es fällt, genau weis. Wir haben schon bewiesen, (§. 11.) daß keine bürgerliche Einschaltungsart von der Welt dem astronomischen Sonnenjahres-Systeme näher

Fünfter Abschnitt.

Von der Art, die Zeit des österlichen Vollmondes im corrigirten Kalender zu bestimmen.

§. 35.

Das dritte wesentliche Stück im christlichen Kalender ist die Bestimmung des Vollmondes, welcher unmittelbar auf das Frühlings-Aequinoctium folget; weil nach dem Schluß der allmeinen nicänischen Kirchenversammlung der nächste Sonntag nach diesem Vollmond der Ostertag ist, von welchem alle übrige bewegliche Festtage abhangen. (§. 20.)

36. §. Wir

näher tritt, als die unsrige, die Größe des tropischen Jahres mag heraus gebracht werden, wie sie immer will. Gesetzt, man fände nach vielhundertjährigen Observationen, daß sie die kleinste von denjenigen wäre, die wir hieoben (§. 12.) angesetzt haben, nämlich von 365 Tagen, 5 Stunden, 48 Min. 45 Secunden; so würde die Differenz in 33 Jahren 11 Minuten betragen: man müßte demnach an Statt der Berechnung im 29ten §. den Quotienten mit 11 $\frac{1}{4}$ mulriplicíren, und das Product von der in der Tabelle gefundenen Zeit des Aequiuoctii abziehn, um die wahre auf das allergenaueste zu haben. Z. E. In dem §. 29. gegebenen Exempel vom Jahre 1760 war der Quotient 4, dieser mit 11 $\frac{1}{4}$ multiplicireb giebt 45. So viel mußte man von 4 U. 18 Min. abziehen, da dann zur wahren Zeit des Aequinoctii fürs Jahr 1760 heraus kommen würde der 20te März um 3 U. 33 Min. Vormittag.

§. 36.

Wir haben schon oben erinnert, (§. 1.) daß es rathsamer sey, den mittlern als den wahren Vollmond zu gebrauchen, weil es doch unmöglich ist, daß man in der ganzen Christenheit zur Zeit des wahren Vollmondes allenthalben die nämliche Stunde zählen könne; woraus folget, daß, wenn an einem Orte zu einer gewissen Stunde sich der wahre Vollmond ereignet, an einem andern Orte in gleicher Stunde der mittlere Vollmond eintreffen müsse, und daß also unumgänglich nothwendig sey, die Zeit des Vollmondes auf einen bestimmten Meridian anzuheften, wenn anderst das Osterfest in der ganzen Christenheit an en einem und dem nämlichen Tage gefeyert werden soll. Dieß haben auch selbst die protestantischen Stände erkannt, da sie den Meridian von Uranienburg, welcher von dem römischen nur um 50 Secunden differiret, angenommen haben.

§. 37.

Was ist nun daran gelegen, ob man auf den wahren oder mittlern Vollmond sieht? Den wahren zu bestimmen, braucht man mühsame astronomische Rechnungen, die sehr wenig Kalendermacher verstehen; und auch diese astronomischen Rechnungen differiren nach Verschiedenheit der Tabellen um 8, 10 und 12 Minuten von einander.

§. 38.

Zu dem gehöret zu Bestimmung der Zeiten und Festtage ein allgemeines Gesetz, welches eben darum, weil es allgemein ist, einförmig, kurz, leicht und zuverläßig seyn muß, folglich an keine astronomische Tabellen gebunden werden sollte, die ein Werk von Privatleuten sind, und allzu weitläuftige Calculn erfordern, worinnen man sich leicht verstoßen kann.

 §. 39. Die

§. 39.

Die mittleren Vollmonde hingegen lassen sich durch die Epaktenrechnung, welche durchgehends einförmig und ganz kurz und leicht ist, geschwind bestimmen. Man ist auch dadurch gesichert, in Feyerung des Osterfestes mit den Juden nicht überein zu kommen, weil diese sich ebenfalls der mittleren Vollmonde bedienen; wiewohl diese Sorge sehr überflüßig ist, indem der jüdische Kalender so eingerichtet ist, daß der 15te des Monats Nisan, an welchem sie ihr Osterfest begehen, niemal auf einen Sonntag fallen kann. Zu dem Ende machen sie ihre Jahre bald um einen Tag größer bald kleiner, damit sie niemal mit dem Osterfeste auf den Sonntag oder Freytag treffen können.

§. 40.

Wir schlagen aber eine ganz andere cyclische Epaktenrechnung vor, als die gregorianische ist. Denn wiewohl diese der goldenen Zahlenrechnung, die man ehmals im julianischen Kalender gebraucht hat, und die sich auf den 19jährigen Mondszirkel gründet, weit vorzuziehen ist, weil man darinnen auf die Anticipationen des Mondes, so in 312 Jahren einen ganzen Tag ausmachen, mit Acht hat; so ist sie doch darinnen fehlerhaft und nicht zuverläßig, weil sie nur die Tage der mittleren Vollmonde, nicht aber die Stunden und Minuten zeiget. Wenn nun das Æquinoctium und der Vollmond auf den nämlichen Tag fallen, so kann man noch nicht wissen, ob der mittlere Vollmond vor oder nach dem Æquinoctio eintrift, folglich ob er österlich sey oder nicht. Hernach zeigen auch die gregorianischen Epakten den mittleren Vollmond zuweilen um einen ganzen Tag später an, als er sich wirklich ereignet.

§. 41. Mit

§. 41.

Mit unserer Epaktenrechnung hingegen lassen sich die Tage, Stunden und Minuten des mittleren Vollmonds eben so leicht und geschwind, ja noch leichter bestimmen, als die bloßen Tage im gregorianischen Kalender. Denn wenn man nach dem gregorianischen Styl den Tag des österlichen mittleren Vollmondes finden will; so muß man zuerst die goldene Zahl suchen; alsdenn muß man in der Epakten-Gleichungstafel sehen, was für ein Epaktenzirkel dem gegebenen Jahrhundert zukömmt; hernach geht man in die ausgedehnte Epaktentafel, und suchet die Zahl im gefundenen Epaktenzirkel auf, welche mit der gefundenen goldenen Zahl correspondiret. Diese zieht man von 30 ab, und thut zu dem Ueberrest 14, so zeigt die Summe den Tag des mittleren Vollmondes im Märzen an; fällt dieser vor dem 21ten, so thut man noch 30 hinzu, und zieht von der Summe 31 ab; alsdann zeigt der Ueberrest den Tag des mittleren österlichen Vollmondes im April an.

§. 42.

In unserer Epaktentafel hingegen hat man nichts anders zu thun, als den Quotienten und Ueberrest, so sich in der ersten Division ergeben haben, aufzusuchen, und die damit correspondirenden Zahlen von einander abzuziehen, (die zweyte nämlich von der ersten) wo sodann die Differenz den Tag, die Stunde und Minuten des mittleren Vollmondes im Märzen anzeigt.

Wir müssen, ehe wir unsere Epaktentafel vorlegen, und ihren Gebrauch zeigen, von dem Grunde und der Art ihrer Einrichtung etwas sagen.

§. 43.

Wir nehmen abermal das Jahr 1600 für das 0 Jahr unserer Kalender-Æræ an. In diesem Jahre ereignete sich der mittlere

Vollmond

Vollmond, nach den delahirischen Tabellen zu Paris, den 29ten März um 2 Uhr 27 ′ 40 ″ Nachmitt. folglich zu Rom um 3 Uhr 9′. weil nun die Epakte von 33 Jahren, 4 Tage, 12 St. 27′ ausmachet, um welche der mittlere Vollmond in so viel Jahren zurücke geht, die einen ganzen Zirkel in unserer Zeitrechnung ausmachen; so muß man, wenn man die Zeit des mittleren Märzvollmondes im Jahre 1633 wissen will, 4 Tage, 12 St. 27′ von 29 Tagen, 3 St. und 9′ abziehen, da dann übrig verbleiben 24 Tage, 14 St. 42′: das ist, der mittlere Vollmond hat sich dieses 1633ste Jahr zu Rom den 24ten März um 14 U. 42′ oder den 25ten um 2 Uhr, 42′ in der Frühe ereignet. Eben so erhellet, daß, wenn man nach Verlauf weiterer 33 Jahren, nämlich für das Jahr 1666 die Zeit des mittleren Vollmondes zu Rom im Märzen wissen will, eine doppelte 33jährige Epakte, nämlich 9 Tage — St. 54′ von 29 Tagen, 3 St. 9′ abgezogen werden müssen, da sich dann zum Unterschied ergeben 20 Tage, 2 St. 15′. der mittlere Vollmond traf also in diesem Jahre zu Rom auf den 20ten März um 2 Uhr, 15′ Nachmittag ein.

§. 44.

Wir haben demnach in unserer Tabelle No. 1. beym Quotienten 1, so das letzte Jahr im 1sten Zirkel andeutet, eine 33jährige, beym Quotienten 2 eine 66jährige oder doppelte, beym Quot. 3 eine dreyfache Zirkelepakte ꝛc. von 29 T. 3 St. 9′ abgezogen, und dadurch die Tage im Märzen bestimmet, an welchen sich der mittlere Vollmond im letzten Jahre eines jeden Zirkels ereignet; wir haben zugleich die Zirkel-Epakten darneben gesetzet. Die Tafel No. 2. enthält die Epakten für einzelne Jahre von 1 bis 33, welche von der No. 1. gefundenen Zeit des Vollmondes abgezogen werden müssen, weil derselbe in so viel Jahren, als der Ueberrest zeiget, um die Anzahl Tage, Stunden und Minuten der darneben befindlichen Epakte weiter zurücke geht. Hier sind beyde Tafeln.

No. 1.

No. 1. Zirkel-Epaktentafel.

quotient	Tag des Vollm. im März			Epakten der Zirkel			quotient	Tag des Vollm. im März			Epakten der Zirkel			quotient	Tag des Vollm. im März			Epakten der Zirkel		
	T	U	M	T	St.	M		T	U	M	T	St.	M		T	U	M	T	St.	M
0	29	3	9	—	—	—	35	18	15	11	10	11	58	70	8	3	13	20	23	56
1	24	14	42	4	12	27	36	14	2	44	15	—	25	71	3	14	47	25	12	22
2	20	2	15	9	—	54	37	9	14	17	19	12	52	72	28	15	3	—	12	6
3	15	13	49	13	13	20	38	5	1	50	24	1	19	73	24	2	37	5	—	32
4	11	1	22	18	1	47	39	30	2	7	28	13	46	74	19	14	9	9	13	—
5	6	12	55	22	14	14	40	25	13	41	3	13	28	75	15	1	44	14	1	25
6	2	—	28	27	2	41	41	21	1	15	8	1	54	76	10	13	16	18	13	53
7	27	—	46	2	2	23	42	16	12	47	12	14	22	77	6	—	50	23	2	19
8	22	12	19	6	14	50	43	12	—	21	17	2	48	78	1	12	22	27	14	47
9	17	23	52	11	3	17	44	7	11	53	21	15	16	79	26	12	40	2	14	29
10	13	11	25	15	15	44	45	2	23	27	26	3	42	80	22	—	13	7	2	56
11	8	22	58	20	4	11	46	27	23	43	1	3	26	81	17	11	47	11	15	22
12	4	10	31	24	16	38	47	23	11	17	5	15	52	82	12	23	19	16	3	50
13	29	10	49	29	5	4	48	18	22	49	10	4	20	83	8	10	52	20	16	16
14	24	22	22	4	4	47	49	14	10	23	14	16	46	84	3	22	25	25	4	44
15	20	9	55	8	17	14	50	9	21	57	19	5	12	85	28	22	44	—	4	25
16	15	21	28	13	5	41	51	5	9	31	23	17	38	86	24	10	16	4	16	53
17	11	9	1	17	18	8	52	30	9	47	28	6	6	87	19	21	50	9	5	19
18	6	20	35	22	6	34	53	25	21	21	3	5	48	88	15	9	22	13	17	47
19	2	8	8	26	13	1	54	21	8	53	7	18	16	89	10	20	56	18	6	13
20	27	8	25	1	18	44	55	16	20	28	12	6	41	90	6	8	29	22	18	40
21	22	19	58	6	7	11	56	12	8	—	16	19	9	91	1	20	3	27	7	6
22	18	7	31	10	19	38	57	7	19	34	21	7	35	92	26	20	19	2	6	50
23	13	19	5	15	8	4	58	3	7	6	25	20	3	93	22	7	53	6	19	16
24	9	6	38	19	20	31	59	28	7	24	—	19	45	94	17	19	25	11	7	44
25	4	18	11	24	8	58	60	23	18	57	5	8	12	95	13	7	—	15	20	9
26	29	18	28	28	21	25	61	19	6	31	9	20	38	96	8	18	32	20	8	37
27	25	6	2	3	21	7	62	14	18	3	14	9	6	97	4	6	6	24	21	3
28	20	17	35	8	9	34	63	10	5	37	18	21	32	98	29	6	22	29	9	31
29	16	5	8	12	22	1	64	5	17	9	23	10	—	99	24	17	56	4	9	13
30	11	16	41	17	10	28	65	1	4	44	27	22	25	100	20	5	29	8	21	40
31	7	4	14	21	22	55	66	26	5	—	2	22	9	200	11	7	53	17	19	16
32	2	15	47	26	11	22	67	21	16	34	7	10	35	300	2	10	15	26	16	54
33	27	16	5	1	11	4	68	17	4	6	11	23	3	400	23	1	21	6	1	48
34	23	3	38	5	23	31	69	12	15	40	16	11	29	500	14	3	42	14	23	27

No. 2.

No. 2. Jahr-Epaktentafel.

Ueberrest.	Epakten. Tage	St.	M.	Ueberrest.	Epakten. Tage	St.	M.	Ueberrest.	Epakten. Tage	St.	M.
1	10	15	11	12	12	11	20	23	13	7	29
2	21	6	23	13	23	2	32	24	24	22	41
3	2	8	50	14	4	4	59	25	6	1	8
4	14	—	1	15	14	20	11	26	16	16	19
5	24	15	13	16	26	11	22	27	27	7	31
6	5	17	40	17	7	13	49	28	9	9	58
7	16	8	51	18	18	5	—	29	20	1	9
8	28	—	3	19	28	20	12	30	1	3	37
9	9	2	30	20	10	22	39	31	11	18	48
10	19	17	42	21	21	13	50	32	22	9	59
11	—	20	9	22	2	16	18	33	4	12	27

Monds-Revolutionen Rev.	Tag.	St.	Min.	Monds-Revolutionen Rev.	Tag.	St.	Min.	Monds-Revolutionen Rev.	Tag.	St.	Min.
I.	29	12	44	III.	88	14	12	V.	147	15	40
II.	59	1	28	IV.	118	2	56	VI.	177	4	24

§. 45.

Die Zirkel in diesen Tabellen gehen bis auf 100, folglich bis aufs Jahr Christi 4900. Wäre der Quotient zwischen 100 und 200, oder zwischen 200 und 300; so thut man die Zirkel-Epacte für die Zwischen-Zirkel zu der Jahrs-Epacte des laufenden Jahrs Nro. 2, und zieht hernach die Summe von derjenigen Epacte ab, welche dem 100ten, 200ten ꝛc. Zirkel zukömmt.

Zum Exempel der Quotient wäre 465, und der Ueberrest 3; so thut man die Zirkel-Epacte von 65 mit 1 Tag 4 St. 44 M. Nro. 1 zu der Jahrs-Epacte des Ueberests 3, welche 2 Tag 8 St. 50 Min. ausmacht; die Summe thut 3 Tage 13 St. 34 Min. Diese zieht man von der Epacte der 400 Zirkel, nämlich von 23 Tagen 1 St. 21 Min. ab, und verfährt im übrigen, wie hernach mit mehrerm zu sehen.

§. 46.

§. 46.

Wenn man die Zirkel Epacte zu dem nebenfindigen Tag des Vollmonds im Märzen addiret; und von der Summe eine ganze Revolution abzieht, so müssen allemal 29 Tage 3 St. 9 Min. heraus kommen; und dieß ist ein Mittel, die Zuverlässigkeit unserer Tabelle zu prüfen.

§. 47.

Will man für ein jedes gegebenes Jahr die Zeit des mittlern Vollmonds im Märzen finden; so zieht man wie oben (§. 16) 1600 davon ab, den Ueberrest dividiret man mit 33: alsdann suchet man den Quotienten in der Tafel Nro. 1 auf, und nimmt die daneben stehenden Tage, Stunden, und Minuten. Hernach suchet man auch in der Tafel Nro. 2 den Ueberrest auf, und excerpiret die daneben stehenden Tage, Stunden, und Minuten: diese ziehet man von jenen ab; so zeiget der Ueberrest den Tag die Stunde und Minute im Märzen, wo sich der mittlere Vollmond ereignet.

§. 48.

Man will zum Exempel wissen, wann der mittlere Vollmond im Märzen Anno 1834 eintrift; so zieht man 1) 1600 davon ab

1843
1600

verbleiben 234

2) diese dividiret man mit 33   33) 234 } 7 Quot.
231

3 Ueberrest

Ss   so

so ist der Quotient 7 und der Ueberrest 3.

3) Der Quotient 7 zeigt in der Tafel N. 1, 27 T. — St. 46 M.
Und der Ueberrest 3 in der Tafel N. 2, 2 T. 8 St. 50 M. Diese letztern 2 Tage 8 Stunden 50 Minuten zieht man von den erstern 27 Tagen — Stunden 46 Minuten ab; so verbleiben im Rest 24 Tage 15 Stunden 56 Minuten.

27 Tage — St. 46 Min.
2 Tage 8 St. 50 Min.
24 Tage 15 St. 56 Min.

also ereignet sich der Vollmond in diesem Jahr zu Rom den 24ten März, um 15 U. 56 Min. astronomischer Zeit, oder den 25ten März um 3 Uhr 56 Minuten in der Frühe, nach der Europäischen Stundenrechnung. (a)

§. 49.

Wenn die in der Tafel Nro. 1 gefundenen Tage weniger sind, als diejenigen, welche die Tafel Nro. 2 giebt. So thut man zu jenen eine ganze Monds-Revolution von 29 Tagen, 12 Stunden 44 Minuten, und zieht alsdann von der Summe die Nro. 2 gefundenen Tage ab.

Nehmen wir zum Exempel das Jahr 1769

1769
1600
169 | 5 Quotient
33) 165 }
4 Ueberrest

Hier

(a) Nach dem Gregorianischen Kalender fällt er auf den 24ten März, der Sonntags-Buchstab ist in diesem Jahr E, im Gregorianischen sowohl als in unserm Kalender.

Hier giebt der Quotient 5 in der Tafel Nro. 1. 6 Tage 12 St. 55 Minuten, und der Ueberrest 4 zeigt in der Tafel Nro 2. 14 Tage — St. 1 Min. Man addirt also zu den 6 Tagen 12 St. 55 Min. eine ganze Revolution von 29 Tagen 12 Stunden 44 Minuten, kommen heraus, 36 Tage 1 St. 39 Minuten, hiervon 14 Tage — St 1 Minute abgezogen, verbleiben 22 Tage 1 Stunde 38 Minuten; also fällt der mittlere Vollmond anno 1769 auf den 22ten März um 1 Uhr 38 Minuten nachmittag (a).

6 Tage	12 St.	55 Min.
29 —	12 —	44 —
36 Tage	1 St.	39 Min.
14 Tage	— St.	1 Min.
22 Tage	1 St.	38 Min.

§. 50.

Wenn die solchergestalten gefundene Zeit des mittlern Vollmonds vor dem Æquinoctio fällt, so ist er nicht Oesterlich, und man muß den nächst darauf folgenden mittlern Vollmond dafür annehmen, das ist, man thut eine ganze Monds-Revolution hinzu, und zieht von der Summe, wenn die ganzen Tage mehr machen als 31, den ganzen Märzen mit 31 Tagen ab; so zeigt der Ueberrest den Tag im April, die Stunde und Minute an, wo solcher mittlere Vollmond eintritt.

(a) Der Gregorianische Kalender giebt ihn ebenfalls auf den 22ten Märzen an. Die astronomische Rechnung aber gibt den wahren Vollmond um 3 Stunde 48 Min. früher an: der Sonntagsbuchstaben ist in diesem Jahr A, und nach dem Febr. hat unser Kalender ebenfalls A.

§. 51.

Wir wollen die beyden Jahre 1776 und 1779 zu Exempeln unsrer Berechnung nehmen:

```
      1 7 7 6
      1 6 0 0
   ─────────────
        1 7 6 } 5
  3 3)  1 6 5 }
   ─────────────
          1 1
```

Hier zeiget der Quotient 5 Nro. 1. 6 Tage 12 St. 55 Min.
der Ueberrest 11 Nro. 2. — T. 20 St. 9 Min.

Also fällt Vollmond im März den 5ten um 16 U. 46 Min.
weil aber das Æquinoctium erst den 21ten um 1 U. 9' Vormittag eintrifft, so thut man zu obigen
eine Revolution von 29 Tagen 12 St. 44 Min.

Kommen heraus 35 Tage 5 St. 30 Min.
Hiervon abgezogen 31 — — —
Verbleiben . . 4 Tage 5 St. 30 Min.

Also begiebt sich der mittlere österliche Vollmond in diesem Jahr zu Rom den 4ten April um 5 Uhr 30 Minuten nachmittag (a)

```
      1 7 7 9
      1 6 0 0
   ─────────────
        1 7 9 } 5
  3 3)  1 6 5 }
   ─────────────
          1 4
```

der

(a) Eben diesen Tag giebt auch die Gregorianische Epacte an. Unser Kalender hat den Sonntagsbuchstaben G durchgehends; der Gregoriani=

der Quotient 5 zeiget . .	6 Tage	12 St.	55 Min.
und der Ueberrest 14 . .	4 =	4 =	59 =
Also der Vollm. im März den	2ten um	7 U.	56 Min.
Folglich vor dem Æquinoctio			
Man thut also hinzu . .	29 Tage	12 St.	44 Min.
Kommen heraus	31 Tage	20 St.	40 Min.

Also fällt derselbe auf den 31ten März um 20 Uhr 40 Minuten, das ist den 1ten April um 8 Uhr 40 Minuten in der Frühe (b).

§. 52.

Wir wollen noch ein Exempel setzen, worinnen die in den vorgehenden zween §§. bemerkten beyden Fälle vorkommen. Wir wollen zu dem Ende das Jahr 1775 vor uns nehmen.

```
        1775
        1600
    ------------
         175 \ 5
    33)  165 /
    ------------
          10
```

S 3 hier

rianische Kalender aber G F; folglich wird darinnen der Vollmond um einen Tag später angezeiget, als er wirklich eintrift

(b) Und auf eben diesen Tag fällt er auch nach dem Gregorianischen Kalender. Der Sonntagsbuchstab ist in unserm sowohl als in Gregorianischen Kalender C

hier zeigt der Ueberrest mehr als der Quotient; denn dieser

giebt .	6 Tage 12 St. 55 Min.
Man thue dazu eine Revolution zu	29 T. 12 St. 44 Min.
so thut die Summa . .	36 Tage 1 St. 39 Min.
der Ueberrest giebt . .	19 Tage 17 St. 42 Min.
also der Vollmond im März den	16ten um 7 U. 57 Min.
folglich vor dem Æquinoctio. Man	
addire demnach eine Revolut. mit	29 Tagen 12 St. 44 Min.
thut die Summa . . .	45 Tage 20 St. 41 Min.
hiervon abgezogen . . .	31 T. — —
Eben derselbe im April den	14ten um 20 U. 41 Min.

oder den 15ten April um 8 Uhr 41 Minuten in der Frühe. (a)

§. 53.

Man kann diese Berechnung auch noch kürzer anstellen; denn man sieht gleich, ob die Jahrs Epacten Num. 2, wenn sie von denen mit einer Revolution vermehrten Zirkel Epacten abgezogen werden, einen Tag vor dem 21ten Märzen geben. In diesem Fall thut man lieber gleich eine doppelte revolution zu der Zirkel Epacte Num. 1 und zieht die Jahrs Epacte Num. 2 mit 31 Tagen vermehret davon ab, so giebt der Ueberrest den Tag des mittlern Vollmonds im April. So bekömmt die Rechnung im nächst vorigen Exempel folgende Gestalt.

6 Ta=

(a) Eben diesen 15ten April giebt auch der Gregorianische Kalender an, der Sonntagsbuchstab ist in beyden Kalendern durch das ganze Jahr A.

	6 Tage	12 St.	55 Min.
eine doppelte revolution . .	59	1	28
	65 Tage	14 St.	23 Min.
	50	17	42
Vollmond in April den . .	14ten um	20 U.	41 Min.

§. 54.

Das ist nun die Einrichtung unserer corrigirten Jahrsforme, welche, was die leichte Berechnungsart, Genauigkeit, und Zuverläßigkeit anbetrift, die Gregorianische gar weit übertrift; Vermittelst einer einzigen Division bestimmet man nicht nur den Sonntagsbuchstaben für jedes gegebene Jahr, sondern auch die Zeit des Frühlings-Aequinoctii und des nächst darauf folgenden mittlern Vollmonds mit der äußersten präcision, so daß man die wahre Osterfeyer niemal verfehlen kann.

§. 55.

Wir wollen ein Jahr vor uns nehmen, und die Berechnung damit erstlich nach der Gregorianischen Methode, und hernach auch nach der unsrigen Anstellen. Es sey dieses das 1770ste Jahr:

Berechnung nach der Gregorianischen Methode.

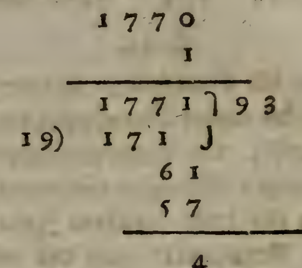
1) Deu Sonntagsbuchstaben zu finden:

```
         1770
            9
    ----------------
         1779 ] 63
   28)   168  ]
    ----------------
           99
           84
         ------
           15
```

Es

Es ist also dieses das 15te Jahr im Sonnenzirkel: dieß muß nun in der Tabelle und zwar von der zweyten Ordnung der Sonntagsbuchstaben aufgeschlagen werden, wo man den Buchstaben G findet. (Bey unserer Berechnungsart hat man hierzu weder Tabellen noch Sonnenzirkel nöthig)

2) Die Epacte zu finden.



Die goldene Zahl ist also 4.

3) Jetzt sucht man in der Epacten-Gleichungstafel das Jahr 1700 auf, und sieht was für ein Epacten-Zirkel diesem Jahrhundert zukömmt, da findet man die Epactenreyhe C aus diesen Epacten correspondiret die 3te mit der goldenen Zahl 4.

4) Man zieht demnach 3 von 30 ab, verbleiben 27: dieß ist der Tag des Neumonds im Märzen, dazu addirt man 14 thut 41 hiervon den ganzen März mit 31 abgezogen verbleibt der 10te April für den Tag des österlichen Vollmonds.

Von der Zeit des Æquinoctii ist nicht einmal die Frage, denn das wird auf den 21ten März für beständig supponiret; so grundlos auch das Suppositum immer ist. Bey diesem Jahr hat es zwar nichts zu bedeuten, weil der Ostervollmond weit gung davon entfernet ist, Es würde aber viel daran gelegen seyn, wenn er zwischen dem 20ten und 21ten März fiele, denn da

würde

würde man in Gefahr seyn, das wahre Osterfest zu verfehlen, wenn man nicht die Zeit des Æquinoctii, sowohl als des Vollmonds, genau wüßte, wie wir schon hieroben (§§. 8 u. 9) gesehen haben.

§. 56.

Nun wollen wir auch unsere Berechnung anwenden.

```
        1770
      - 1600
      ------
         170] 5 Quotient
  33)    165]
  ---------------
      Ueberrest  5
hierunter Schaltjahr  1
      ----------------
             6  rückwärts
             5  Quotient Vorwärts
      ----------------
             1  zurück G wie im Gregorianischen.
  0   6   5   4   3   2   1   0
  A   B   C   D   E   F   G   A
  0   1   2   3   4   5   6   0
```

Nun braucht man keine weitere Division: der Ueberrest 5 zeigt in der Aequinoctial-Tafel das Æquinoctium auf den 20ten März um 2 U. 31′ Nachmittag: der Quotient multipliciret mit 3 giebt 15; diese zieht man (§. 28.) von 31 Minuten ab, bleiben 16 M. also ist die genaue Zeit des Æquinoctii zu Rom den 20ten März um 2 Uhr 16 Minuten Nachmittag.

Der Quotient 5 giebt in der Epacten-Tafel Num. 1 .	6 Tage	12 St.	55 M.
dazu eine doppelte revolution .	59	1	23 M.
	65 Tage	14 St.	23 M.
die Jahrs Epacten addirt zu 31 Tagen	55	15	13
Vollmond im April den . .	9ten um	23 U.	10 M.

das ist den 10ten April um 11 Uhr 10 Minuten Vormittag.

§. 57.

Wer sieht nun nicht, daß diese Berechnung weit leichter ist als die Gregorianische?

Sie ruhet hiernächst auf ganz einfachen und sichern Gründen: da hingegen die Art der gregorianischen Epacten- und Sonnenzirkel-Einrichtung viele intricante Notionen voraus setzet, um sie deutlich und zuverläßig genug einzusehen.

§. 58.

Noch ein besonderer Vortheil bey unserer Kalenderforme ist dieser, daß sie, wenn man immer will, eingeführet werden kann, ohne das geringste Aufsehen zu erwecken, ohne einige Tage auszumärzen, noch die Commercien zu verwirren: wenn nur die Vorsicht gebraucht wird, daß man den Anfang damit nicht in einem corrigirten Schaltjahr, oder in den unmittelbar vorhergehenden, auf ein Gregorianisches Schaltjahr folgenden Jahre mache. In einem Gregorianischen Schaltjahr aber, und in denen unmittelbar vorhergehenden auf das nächste corrigirte Schaltjahr folgenden Jahren, kann man allemal den Anfang damit machen. So könnte diese neue Jahrsforme zum Exempel Ao. 1770

1771 und 1772 eingeführet werden; denn die zwey ersten haben im Gregorianischen Kalender den nämlichen Sonntagsbuchstaben wie in unserm Kalender, und im dritten ebenfalls bis auf den Schalttag, welchen man nur auslassen darf. Ao. 1773 aber kann man nicht damit anfangen, denn dieß ist in unserm Kalender ein Schaltjahr, welches vor dem Schalttage den Buchstaben D, im Gregorianischen aber den Buchstaben E hat.

§. 59.

Doch ist die Regel umgekehrt in denen Jahren, welche nach einem gemeinen Säculahrjahre bis auf den nächsten completen vierfachen Zirkel von 132 Jahren folgen. Z. E. Von An. 1703 bis 1732, von An. 1802 bis 1864, von 1903 bis 1996 ꝛc.

§. 60.

Mit einem Worte, wenn man wissen will, ob mit einem vorgegebenen Jahre unsere neue Kalenderforme eingeführet werden könne; so berechnet man den Sonntagsbuchstaben, sowohl nach unserer, als nach der gregorianischen Methode. Sind beyde Buchstaben entweder das ganze Jahr hindurch, oder doch wenigstens vom Anfange bis auf den Schalttag einerley; so kann sie mit dem vorgegebenen Jahre angefangen werden, andrergestalt nicht.

§. 61.

Man fraget z. E. ob mit dem Jahre 1805, welches das erste nach dem gregorianischen Schaltjahre ist, unser Kalender anfangen könne?

Nach der gregorianischen Methode.

```
        1805
           9
      ---------
28)  1814] 64
     168 ]
      ---------
       134
       112
      ---------
        22   In der 3ten Ordnung F.
```

Nach unserer Methode.

```
        1805
        1600
      ---------
        205] 6 Vorwärts
33)     198]
      ---------
          7
          1
      ---------
          8 zurück
          6 Vorwärts.
      ---------
          2 Zurück F
```

Weil nun beyde Sonntagsbuchstaben gleich sind, so kann in diesem Jahre unser Kalender eingeführet werden.

Nehmen wir hingegen das 1807te Jahr, welches das erste nach dem corrigirten Schaltjahre, und im Zirkel das neunte ist, nach der gregorianischen Methode:

1807

```
        1 8 0 7
            9
    ---------------
        1 8 1 6⎫ 6 4
  28)   1 6 8  ⎭
    ---------------
          1 3 6
          1 1 2
    ---------------
            2 4      in der 3ten Ordn. D.
```

Nach unserer Methode:

```
        1 8 0 7
        1 6 0 0
    ---------------
          2 0 7⎫
  3 3     1 9 8⎭    6 Vorwärts
    ---------------
              9
              2
          ---------
            1 1  rückwärts
              6  Vorwärts
          ---------
              5  rückwärts C
```

Hier hat der gregorianische Kalender den Sonntagsbuchstaben D, der unsrige aber C; folglich kann mit diesem Jahre unser Kalender nicht anfangen.

Beyde Exempel zeigen auch die Ausnahm von der (§. 58.) gegebenen Regel.

§. 62.

Wir sehen demnach nicht, was unsere katholische Kirche sowohl, als die Protestantischen hinderen sollte, diese Einschaltungsart anzunehmeu und einzuführen. Eine bessere und bequemere ist doch in Ewigkeit nicht zu hoffen, wie wir oben (§. 12.) u. f. demonstrativisch gezeiget haben. Wenigstens würde dadurch so viel gewonnen, daß die Spaltungen wegen des Osterfestes unter den Christen aufhöreten, die den Feinden des Christlichen Namens nur zum Gespötte und Aergerniß dienen, da ein Theil der Christenheit das Denkmal unserer Erlösung mit Freuden feyert, der andere aber zu gleicher Zeit trauret und fastet.

§. 63.

Würde endlich einer oder anderer = oder vieleicht beyderseits für unumgänglich nöthig erachtet, daß anstatt des mittleren der wahre Frühlingsvollmond zum Grunde der Osterfeyer genommen werden sollte; so würde der Sache gar leicht durch eine allgemeine Verordnung abzuhelfen seyn, vermöge deren, wenn der mittlere Vollmond 12 Stunde entweder vor oder nach dem Æquinoctio, oder auf einen Samstag nachmittag fiele, die astronomische Berechnung nach gewissen Tabellen, über die man sich beyderseits vergleichen könnte, angestellet werden müßte, um die eigentliche Zeit des wahren Vollmondes aufs genaueste zu bestimmen. Aber auch da muß doch ein gewisser Meridian zur allgemeinen Basi genommen werden.

§. 64.

Gesetzt aber, man könnte und wollte sich nicht über die zu erwählen kommende astronomische Tabellen vergleichen; gesetzt, man bliebe katholischer Seits bey dem Meridian vor Rom, und prote=

protestantischer Seits bey dem zu Uranienburg; so wird sich doch kaum in etlichen tausend Jahren unter beyderley Berechnungen ein solcher Unterschied heraus werfen, der in Feyerung des Osterfestes eine Ungleichförmigkeit verursachen könnte.

Sechster Abschnitt.

Von Reduction der Tage des corrigirten Kalenders auf den gregorianischen und julianischen.

---

§. 65.

Nur eine Schwierigkeit scheint im Wege zu stehen: und diese betrift die bisherigen astronomischen Tafeln. Solche sind bis auf das Jahr 1582 auf die julianischen, und für die nachfolgenden Jahre auf die gregorianische Jahresforme calculiret. Soll man diese umgießen? Nein, es ist nicht nothwendig. Man darf nur den vorgegebenen Tag auf den gregorianischen reduciren, und für diesen den astronomischen Calcul nach den Tafeln anstellen. Nichts ist leichter, als diese Reduction. Man suchet für das vorgegebene Jahr den gregorianischen Sonntagsbuchstaben, und vergleicht ihn mit dem unsrigen. Sind sie beyde einerley, so braucht es keine Reduction; sind sie aber verschieden, so läßt sich leicht ermessen, ob zu dem vorgegebenen Tage 1 oder mehr hinzu gethan, odrr abgezogen werden müsse. Man sucht nämlich im Kalender einen Tag auf, welcher unsern Sonntagsbuchstaben führet, und sieht, was ihm für ein Monatstag zukömmt: alsdenn sieht man, was der gregorianische Sonntagsbuchstab, der zu nächst bey dem unsrigen steht, für einen Monatstag andeutet, dieß ist der nämliche

liche Tag im gregorianischen Kalender; der in dem unsrigen der so und sovielte des Monats heißt.

§. 66.

Z. E. In diesem angefangenen 1769sten Jahre, welches nach unserer Jahresforme ein Schaltjahr ist, haben wir die beyden Sonntagsbuchstaben B und A, wovon B vom ersten Jänner bis auf den Schalttag, A aber nach dem Schalttage das übrige Jahr hindurch gilt. Im gregorianischen Kalender haben wir das ganze Jahr hindurch den Buchstaben A. Wenn demnach der vorgegebene Tag nach dem Schalttage fällt; so braucht es keine Reduction. Eben der Sonntag, der in unserm Kalender der 19te März heißt, ist auch im gregorianischen der 19te März. Wenn aber ein Tag vor dem Schalttage gegeben wird, z. E. der 14te Febr. so suchet man um diesen Tag herum unsern Sonntagsbuchstaben B, wo sich der 13te Febr. zeiget. Der gregorianische Sonntagsbuchstab A stehet beym 12ten Febr. Der Sonntag also, welcher in unserm Kalender der 13te Febr. ist, heißt im gregorianischen der 12te; folglich ist der 14te Febr. unsers Styli der 13te Febr. nach dem gregorianischen.

§. 67.

Wie übrigens die Ordnung der Sonntagsbuchstaben nach dem gregorianischen Styl in einem jeden vorgegebenen Jahrhundert ohne Tabellen geschwind zu finden sey, das haben wir schon oben in der Anmerkung (a zum 33sten §.) angegeben.

§. 68.

Man kann auch die gregorianischen Sonntagsbuchstaben noch kürzer finden, ohne aus selbigem Kalender einige Elementa, Tabellen, Sonnenzirkel, oder Ordnung der Sonntagsbuchstaben sondern nur seine bloße Einrichtung zu gebrauchen, und zwar folgender Gestalt:

1)

1) Weil 400 Gregorianische Jahre genau 20871 complete Wochen ausmachen, so kömmt auch nach deren Verfluß die nämliche Reyhe von Buchstaben zurück: und der Sonntagsbuchstab A, den das Jahr 1600 nach dem Schalttage hat, kömmt auch den Jahren 2000, 2400, 2800, 3200 ꝛc. und eben so den Jahren 1200, 800, 400, 0 zu, wenn dieses Kalender-System zurück fortgesetzt würde. Man dividiret demnach das vorgegebene Jahr mit 400, das ist, man zieht so oft 400 davon ab, als sichs thun läßt; nämlich 1600, 2000, 2400. ꝛc.

2) Der Ueberrest, welcher die Jahre anzeiget, die nach den 400 mehrfach completierten Jahren verflossen sind, dividiret man mit 4, und thut den Quotienten zum Ueberrest; so zeigt die Summa die Tage an, welche vom nächst vorhergehenden 400ten Jahre an bis auf das vorgegebene, über die completen Wochen, verflossen wären, wenn man genau alle 4 Jahre einen Tag eingeschaltet hätte.

3) Weil aber nach dem Gregorianischen Styl in jedem gemeinen Säcular-Jahr der Schalttag weggelassen, und erst im 4ten Säcular-Jahr wiederum eingeschaltet wird; so muß von der Summa Nro. 2 die erste Ziffer des Ueberrests abgezogen werden.

4) Was alsdann übrig bleibt, das dividiret man mit 7; so zeigt der neue Ueberrest, wieviel Buchstaben von A zurückgezählet werden müssen um den Sonntagsbuchstaben des vorgegebenen Jahrs zu haben.

Es sey z. E. das vorgegebne Jahr

	1 7 6 9	
hievon abgezogen	1 6 0 0	
verbleiben in Ueberrest	1 6 9	Jahre, diese
mit 4 dividiret geben	4 2	zum Quotienten
Summa	2 1 1	hiervon die erste
Ziffer des Ueberrests	1	abgezogen.
Verbleiben	2 1 0	diese mit
7 dividiret bleibt übrig	0	folglich ist der Sonn=

tagsbuchstab im Jahr 1600 A, und eben diesen Buchstaben, haben auch die Jahre 0, 400, 800, 1200, 2000, 2400 ꝛc.

Nehmen wir das Jahr	2 3 4 5	
hiervon abgezogen	2 0 0 0	
Verbleiben im Ueberrest	3 4 5	diese mit
4 dividiret geben	8 6	zum Quotienten
Summa	4 3 1	hiervon die erste
Ziffer des Ueberrests	3	abgezogen
Verbleiben	4 2 8	diese mit
7 dividiret bleibt übrig	1.	Folglich wird der

Sonntagsbuchstab in diesem Jahre G seyn.

Noch ein Exempel vom Jahr	1 8 6 7	
hiervon abgezogen .	1 6 0 0	
Verbleiben im Ueberrest	2 6 7	diese mit 4 divi=
diret geben . .	6 6	zum Quotienten
Summa	3 3 3	hiervon die erste
Ziffer des Ueberrests	2	abgezogen.
Verbleiben	3 3 1	diese mit 7 divi=
diret bleiben übrig	2	also ist der Sonntags=

buchstab im Jahr 1867 F.

Wenn

Wenn das vorgegebene Jahr ein Schaltjahr ist, so gilt der gefundene Sonntagsbuchstab nach dem Schalttage das übrige Jahr hindurch, und der nächstfolgende vom 1ten Jenner bis auf den Schalttag. Wenn demnach der gefundene Sonntagsbuchstab A ist; so gilt B vor dem Schalttage

§. 69.

Eben so leicht läßt sich der Sonntagsbuchstab im Julianischen Kalender ohne Sonnenzirkel bestimmen. Denn weil 700 Julianische Jahre 36525 complete Wochen ausmachen; folglich nach deren Verfluß die vorige Reyhe der Buchstaben zurückkehret; so darf man nur 1) das vorgegebene Jahr mit 700 dividiren, das ist 700 so oft davon abziehen, als sichs thun läßt, nämlich 700, 1400, 2100, 2800, ꝛc. 2) Den Ueberrest dividiret man, wie im vorigen §. mit 4, und thut den Quotienten hinzu. 3) Von der Summa zieht man beständig 2 ab, weil die Sonntagsbuchstaben im 0 Jahr um 2 differiren, da der Gregorianische Kalender nach dem Schalttage A, der Julianische aber C hat. 4) Was übrig verbleibt, dividiret man mit 7; so zeigt der neue Ueberrest, wieviel Buchstaben von A zurückgezählet werden müssen, um den Sonntagsbuchstaben für das gegebene Jahr im Julianischen Kalender zu haben.

Wir wollen die nämlichen Exempel gebrauchen, die wir im vorigen §. 68 angewendet haben.

	1 7 6 9	
hiervon abgezogen	1 4 0 0	
Verbleiben	3 6 9	Jahre, diese mit
4 dividiret geben	9 2	zum Quotienten
Summa	4 6 1	
hiervon abgezogen	2	
Verbleiben	4 5 9	diese mit
7 dividirt, bleibt übrig	4	Also ist der Julianische

Sonntagsbuchstab in diesem Jahre D.

	2345	
hiervon abgezogen	2100	
Verbleiben	245	Jahre, diese mit
4 dividiret geben	61	zum Quotienten
Summa	306	
hiervon abgezogen	2	
Verbleiben	304,	diese mit 7 dividiret
bleiben übrig	3	Also ist der Julianische

Sonntagsbuchstab in diesem Jahr E

	1867	
hiervon abgezogen	1400	
Verbleiben	467	Jahre; diese mit
4 dividiret geben	116	zum Quotienten
Summa	583	
hiervon abgezogen	2	
Verbleiben	581,	diese mit 7 dividiret
bleibt übrig . .	0	folglich ist der Juliani-

sche Sonntagsbuchstab in diesem Jahre A.

§. 70.

Wenn man wissen will, um wieviel Tage der Julianische Kalender von dem Gregorianischen in einem jeden vorgegebenen Jahre differiret; so wirft man 1) von der gegebenen Jahrzahl 2 Ziffer rechter Hand hinweg, wo sodann die bloßen Säcular-Jahre stehen bleiben. Wenn nun in dem gregoriani-

schen

schen System alle Säcular-Jahre ohne Unterschied der Schalttag ausgelassen würde; so würden beyde Kalender um eben soviel Tage differiren, als die Säcular-Jahre ausmachen. Da aber nach dem Gregorianischen Stylo im 4ten Säcular-Jahr ein Tag eingeschaltet wird; so dividiret man 2) die Säcular-Jahre mit 4, und zieht den Quotienten davon ab. Und gleichwie im o Jahr der gemeinen Zeitrechnung, das ist im ersten Jahr vor der Æra vulgari der Sonntagsbuchstab vor dem Schalttage D war, folglich das Jahr mit einem Donnerstage anfieng; nach dem Gregorianischen System aber, wenn man dasselbe bis auf den Anfang der Æræ vulgaris fortsetzte, das o Jahr den Sonntagsbuchstaben B vor dem Schalttage gehabt, folglich mit einem Samstage angefangen haben würde; so muß man 3) Von der Nro. 2 gefundenen Zahl abermal 2 abziehen; da sodann der Ueberrest anzeiget, um wieviel Tage von dem Gregorianischen zurückgezählet werden müssen, um den nämlichen Tag im Julianischen Kalender zu haben.

Nehmen wir z. E. das Jahr	1 7 6 9	hiervon wirft man die
zwey Ziffer rechter Hand	6 9	hinweg,
die stehen verbleibenden	1 7	dividiret man mit 4,
so ist der Quotient	4	diese von 17 abgezogen
verbleiben	1 3	hiervon
weiter abgezogen	2	
Verbleiben	1 1	

folglich differiret der Julianische Kalender in diesem Säculo von dem Gregorianischen um 11 Tage. Der 12te März im Gregorianischen Kalender ist also der 1te März im Julianischen.

§. 71.

Hieraus ergiebt sich, daß beyde Kalender im Jahr 1200, um eine ganze Woche, im Jahr 2100, um zwo, im Jahr 3000 um 3, im Jahr 3900 um 4, im Jahr 4900 um 5, im Jahr 5800 um 6, im Jahr 6700 um 7. im Jahr 7700 um 8, im Jahr 8600 um 9, im Jahr 9500 um 10 ganze Wochen ꝛc. differiren. Weil nun unser corrigirter Kalender in allen obigen Jahren eben die Sonntagsbuchstaben führet, wie der Gregorianische; so differiret er auch von dem Julianischen um die nämliche Anzahl Tage, wie der Gregorianische.

§. 72.

Wenn man demnach die Tage unsers corrigirten Kalenders auf den Julianischen reduciren will; so nimmt man die Differenz der Sonntagsbuchstaben: das ist, man zählet, von dem Julianischen Sonntagsbuchstaben angefangen, in gerader Reyhe fort, bis man auf unsern Sonntagsbuchstaben kömmt, und thut hernach in den Jahren, die zwischen 1200 und 2100 fallen, 1 Woche oder 7 Tage, zwischen 2100 bis 3000 2 Wochen ꝛc. hinzu. Die Summa zieht man von dem gegebnen Tag unsers Kalenders ab; so zeiget der Ueberrest den nämlichen Tag im Julianischen Kalender an.

Man fragt z. E., was der 23ste März 1769 für ein Tag im Julianischen Kalender sey? In diesem ist der Sonntagsbuchstab D, und in dem unsrigen A, von D bis auf A fortgezählet, sind 4 Buchstaben; hierzu 7 addiret, geben 11: diese von 23 abgezogen verbleiben 12: folglich ist der 23te März unsers Kalenders der 12te März im Julianischen.

§. 73.

§. 73.

Unser Kalender-System ist so beschaffen, daß man auch die Sonntagsbuchstaben, das Frühlings-Aequinoctium, nnd den österlichen Vollmond für die Jahre vor Ao. 1600 damit bestimmen kann. Denn weil 50 ganze Zirkel 1650 Jahre geben, so kann man das 50te Jahr vor der Æra vulgari für das 0 Jahr der Epoche annehmen. Man addiret also zu dem vorgegebenen Jahre 50 und verfähret im übrigen wie oben §. 16. n. 1. 2. und so ferner. Weil aber in 50 Zirkeln, zurück gerechnet, der Sonntagsbuchstab um 50 Tage, oder um 7 Wochen und 1 Tag das ist um 1 zurück geht; so muß man, um den Sonntagsbuchstab zu haben, den Quotienten um 1 vermindern, und im übrigen wie oben §. 16. und ferner verfahren.

Man fragt z. E., was das Jahr 325 in unserm Kalender für einen Sonntngsbuchstaben habe?

so addiret man zu 325
die Zahl . . 50

375) 11 Quotient
dividiret mit 33) 33

45
33

Ueberrest 12 ein Schaltjahr
darunter sind 3 Schaltjahre

15 zurück
der Quotient um 1 vermindert 10 Vorwärts

5 zurück C.

Also ist der Sonntagsbuchstab in diesem Jahr C. Diesen giebt auch der Julianische Kalender.

§. 74.

Das Frühlings-Aequinoctium zu finden, verfährt man wie oben im 4ten Abschnitt: das ist man suchet den Ueberrest in der Aquinoctialtafel, und addiret zu der danebenstehenden Zeit 2 Stunden und 30 Minuten; weil das Aequinoctium in 50 Zirkeln, zurück gerechnet, um 150 Minuten vor sich geht (§. 12). Von der Summa zieht man den Quotienten 3mal genommen ab; so zeigt der Uberrest den Tag, die Stunde und Minuten des Aequinoctii im Märzen.

In obigem Exempel ist der Ueberrest 12; dieser giebt in der Aequinoctialtafel den 20ten März, 7. Uhr 14. Minuten Vormittag: dazu addiret man 2 Stunden 30 Minuten, thut 9 U. 44 M. Hiervon den Quotienten 3mal, das ist 33 Minuten abgezogen, verbleiben 9 Uhr 11 Minuten zur Zeit des Aequinoctii zu Rom den 20ten März Ao. 325.

§. 75.

Den österlichen mittlern Vollmond zu bestimmen verfährt man wie oben (§. 47. und ferner.) Man thut aber zu der gefundenen Zeit eine Epacte von 50 Zirkeln, mit 19 Tagen, 5 Stunden und 12 Minuten hinzu; weil der mittlere Vollmond in solcher Zeit, zurückgerechnet, um soviel vor sich geht.

Im obigen Exempel giebt der Quotient 11 in der Epactentafel Nro. 1 8 Tage 22 Stunden 58 Minuten.

dazu . . .	19	5	12	
thut	28 Tage	4 Stunden	10 Minuten.	
Der Ueberrest 12 giebt in der Epactentafel Nro. 2,	12 Tage	11 Stunden	20 Minuten.	
Vollmond im März den	15ten um	16 Uhr	50 Minuten.	

Weil

Weil aber dieser vor dem Aequinoctio fällt: so ist er nicht österlich: man muß also noch eine Monds-Revolution darzu thun

mit	29 Tagen	12 Stunden	44 Minuten.
thut	45 Tage	5 Stunden	34 Minuten

Den Märzen mit 31 Tagen abgezogen, fällt der österliche Vollmond auf den 14ten April um 5 Uhr 44 Minuten Nachmittag. Dieser hat den Buchstaben F; folglich war er ein Mittwoch: also fiel Ostern auf den 18ten April.

Wir wollen es auch mit einem Jahr versuchen, welches in der Historie sehr berühmt ist, weil es darinnen Zweifel wegen des Osterfests absetzte: und das ist das Jahr 387, worinnen der Heil. Augustinus am Charsamstage, den 24ten April, getauft wurde.

```
                      387
                       50
                     ----
                      437 ⎫ 13 Quotient
                33)   33  ⎭
                     ----
                      107
                       99
                     ----
                        8  ein Schaltjahr
         darunter       2  Schaltjahre
                     ----
                       10  Zurück
Quotient corrigirt     12  Vorwärts
                     ----
                        2  Vorwärts C
```

Der Sonntagsbuchstab war also nach dem Schalttage C; und diesen giebt auch der Julianische Kalender (§. 69.)

Der Ueberrest 8 giebt in der Aequinoctialtafel am 20ten März das Aequinoctium um 7 Uhr 58′ frühe. Dazu 2 St. 30′, thut 10 Uhr 28′. Davon abgezogen den Quotienten dreymal, das ist 39′, verbleibt zur wahren Zeit des Aequinoctii der 20te März um 9 Uhr 49′ früh.

Eine 50 fache Zirkel Epacte thut	19 Tage	5 St.	12 Min.
der Quotient 13 giebt in der Epacten-Tafel Nro. 1,	29 Tage	10 St.	49 Min.
Zusammen	48 T.	16 St.	1 Min.
der Ueberrest 8 giebt Nro. 2,	28 T.	—	3 Min.
		15 U.	58 Min.

also der Vollmond im Märzen den 20ten um 15 U. 58 Min. das ist den 21ten um 2 Minuten vor 4 Uhr in der Frühe. Nach den Cassinischen Tafeln begab sich der wahre Vollmond den 21ten etliche Minuten nach 11 Uhr vormittag; er war also ganz gewiß österlich. Weil aber dieser Tag den Buchstaben C hat, so war er dießmal ein Sonntag, folglich hätte Ostern 8 Tage darnach das ist am 28ten März gefeyert werden sollen. Der Heil. Ambrosius entschied aber, auf die Anfrage der Bischöffe von Aemilien, daß der 25te April der wahre Ostertag wäre, welches unrecht war. Der Mondszirkel hatte ihn verführet; denn dieser zeigt wirklich den österlichen Vollmond auf den 18ten April. Hieraus sieht man abermal, wie gegründet unsere obige Anmerkung (§. 8.) ist.

§. 76.

Wenn man will; so kann man auch diese Methode für die Jahre, die auf 1600 folgen, gebrauchen.

Nehmen

Nehmen wir zum Exempel das Jahr	1769	
thun wir hiezu die Zahl von	50	
thut	1819	55 Quotient
diese mit 33 dividiret	33) 165	
	169	
	165	
der Ueberrest ein Schaltjahr	4	
darunter stecken Schaltjahre	1	
	thut 5	Zurück
der Quotient um 1 vermindert	54	Vorwärts
	49	Vorwärts
diese 49 mit 7 dividiret bleibt übrig	0	—

Also ist in diesem Jahr der Sonntagsbuchstab A, wie hier-oben (§. 8.)

Der Ueberrest 4 zeigt in der Aquinoctialtafel den 20ten März um 8 Uhr 43 Minuten: dazu addiret 2 Stunden 30 Minuten, thut 11 Stunden 12 Minuten: davon abgezogen den Quotienten 3mal mit 165 Minuten, oder 2 Stunden 45 Minuten, verbleiben 8 Uhr 27 Minuten zur Zeit des Aquinoctii zu Rom den 20ten März.

Eben so kömmt die Zeit des mittlern Vollmonds heraus. Denn der Quotient 55 giebt in der Epactentafel Nro. 1,

	Tage	St.	Min.
	16	20	28
dazu	19	5	12
thut	36	1	40

das ist:	36 Tage 1 St. 40 Min.
Der Ueberrest 4 giebt in der Epactentafel Nro. 2,	14 Tage — St. 1 Min.
Also fällt der mittlere Vollmond im März auf den	22ten um 1 Uhr 39 Min.

und dieß trift mit der Berechnung (§. 49.) bis auf eine einzige Minute nahe genau zusammen.

§. 77.

Wenn man also auch die Gregorianische Einschaltungsart beybehalten wollte; so würde doch noch unser System dazu dienen, daß man die wesentlichen Stücke des Kalenders für das vorgegebene Jahr daraus bestimmte, und die gefundenen Tage sofort auf den Gregorianischen Kalender reducirte (§. 68.)

Nehmen wir z. E. das Jahr 1768. Dieß ist in unserm Kalender das 3te im 6ten Zirkel von Ao. 1600 angefangen, und hat den Sonntagsbuchstaben C. Das Aequinoctium fällt auf den 21ten März um 2 Uhr 38 Minuten frühe: und der österliche Vollmond den 3ten April um 4 Uhr 50 Minuten früh. Weil nun der Gregorianische Kalender dieses Jahr nach dem Schalttage den Sonntagsbuchstaben B hat, folglich um einen Buchstaben weniger zählet als der unsrige; so fällt das Frühlings-Aequinoctium nach dem Gregorianischen Stylo den 20ten März, um 2 Uhr 38 Minuten frühe, und der österliche Vollmond den 2ten April um 4 Uhr 50 Minuten frühe. Der 2te April hat den Buchstaben A; folglich fällt Ostern in diesem Jahr nach dem Gregorianischen Styl auf den 3ten April.

Zweyter

Zweyter Theil.

Erster Abschnitt.

Eingang.

§. 78.

Bis hieher habe ich immer den einfachen Zirkel von 33 Jahren für den besten gehalten, und bewiesen, daß er unter allen anderen Zirkeln, wegen der Einschaltungsart, der beste ist. (§. 14.) Die Combination zweyer oder mehrerer verschiedener Zirkel hat mir immer etwas perplexes zu seyn geschienen. Nach einem reifen Nachdenken aber habe ich gefunden, daß es in der Berechnung eben so wenig, oder doch nicht viel mehr Mühe braucht, zween verschiedene Zirkel mit einander zu combiniren, als sich eines einfachen zu bedienen.

§. 79.

Es ist beynahe so gut als demonstriret, daß die wahre Größe des tropischen Jahres geringer als 365 Tage, 5 Stunden, 48 Min. und 49 Sec. und näher bey 44 Sec. als 49 ist. Der Herr de la Laude in seiner Astronomie 1. Buch §. 127. giebt die Größe des tropischen Jahres von 365 Tagen, 5 Stunden, 48 Min. und 45 Sec. als aus der Erfahrung richtig bestimmet an. Wir haben schon oben (§. 12) gezeiget, daß in dieser Voraussetzung ein Zirkel von 33 bürgerlichen Jahren, in welchem 8 Tage eingeschaltet werden, um 11 Min. 15 Sec. kleiner, als 33 tropische Jahre; und daß hingegen 29 tropische Jahre um 33 Min. 45

Sec.

Sec. größer sind als ein Zirkel von 29 bürgerlichen Jahren, worinnen 7 Tage eingeschaltet werden. Drey Zirkel von 33 Jahren (das ist 99 Jahre, worinnen 24 Täge eingeschaltet werden) sind demnach um 33 Min. 45 Sec. kleiner als 99 tropische Jahre; und 29 tropische Jahre sind um 33 Min. 45 Sec. größer als ein Zirkel von 29 Jahren, worinnen 7 Tage eingeschaltet werden. Wenn man also 3 Zirkel von 33 Jahren, und hernach einen von 29 Jahren gebrauchet, die zusammen 128 Jahre ausmachen; so werden die Fehler gegen einander vollkommen compensiret: wenn man nämlich voraus setzet, daß das tropische Jahr auf das allergenaueste 365 Tage, 5 Stunden, 48 Min. und 45 Sec. beträgt, wie man fast sicher vermuthen darf. Nach 128 Jahren gienge folglich das Æquinoctium nicht einmal um eine Secunde zurück oder vor sich, welches in einem einfachen Zirkel von 33 Jahren um 3 Minuten zurücke tretten würde, wenn das tropische Jahr auf das genaueste 365 Tage, 5 Stunden, 49 Min. ausmachte (§. 12.)

§. 80.

Ein solcher zusammen gesetzter Zirkel von 128 Jahren ist demnach in allem Betracht dem einfachen von 33 Jahren weit vorzuziehen. Nun sollte man meynen, es würde hierzu eine sehr perplexe Rechnung erfordert. Es ist aber dem nicht also, wie wir bald hernach sehen werden. Ich werde hier viel kürzer seyn, als im ersten Theile, weil die allda weitläufiger angebrachten Gründe darzu dienen, das, was ich nunmehr im Kurzen sagen werde, vollständig zu erläutern.



Zwey=

Zweyter Abschnitt.

Wie im combinirten Zirkel von 128 Jahren die Eigenschaft der Jahre, und für ein jedes gegebenes Jahr der Sonntagsbuchstab zu bestimmen.

§. 81.

Wir setzen 3 Zirkel von 33 Jahren, in deren jedem das 4te, 8te, 12te, 16te, 20te, 24te, 28te und 33te Jahr Schaltjahre von 366 Tagen sind. Auf diese 3 Zirkel, die 99 Jahre ausmachen, lassen wir einen einzigen Zirkel von 29 Jahren folgen; worinnen das 4te, 8te, 12te, 16te, 20te, 24te und 29te Schaltjahre sind. Beyde zusammen machen also einen grossen Zirkel von 128 Jahren aus, worinnen über die 365 Tage, die für ein gemeines Jahr gelten, 3mal 8, (das ist 24) und 1mal 7, zusammen also 31 Tage eingeschaltet werden. Ein solcher Zirkel von 128 Jahren enthält demnach über die completen Wochen noch 128 und 31, zusammen aber 159 Tage; das ist 22 Wochen und 5 Tage.

§. 82.

Wenn also z. E. das erste Jahr im ersten Zirkel von 128 Jahren mit einem Sonntage angefangen hat, so fängt das erste im 2ten Zirkel mit einem Freytage an. Folglich gehen die Sonntagsbuchstaben nach Verflusse eines 128jährigen Zirkels um 2 vor sich. Wenn demnach das Jahr 1600 den Sonntagsbuchstaben A hat; so hat das Jahr 1728 C.

§. 83.

Wir haben schon oben (§. 15) erwiesen, daß nach einem 33jährigen Zirkel der Sonntagsbuchstab um 1 weiter vor sich geht.

Und

Und jedermann weis, daß nach einem gemeinen Jahre der Sonntagsbuchstab um 1, und nach einem Schaltjahre um 2 zurücke geht. Dieß alles voraus gesetzet, wird es nicht schwer fallen, zu bestimmen, ob ein vorgegebenes Jahr der gemeinen Zeitrechnung ein gemeines oder ein Schaltjahr nach unserm Stylo ist, und ob es zum größern Zirkel von 33, oder zum kleinern von 29 Jahren gehöret, und was ihm für ein Sonntagsbuchstab zukömmt.

§. 84.

1) Man reduciret nämlich das vorgegebene Jahr Christi auf unsre Æram, das ist, man zieht 1600 davon ab.

2) Den Ueberrest, welcher das Jahr unsrer Æræ andeutet, dividiret man mit 128; was heraus kömmt, nennet man den **ersten Quotienten**

3) Was nach der Division übrig bleibt, dividiret man ferner mit 33, und nennet das, was heraus kömmt, den **zweyten Quotienten**

4) Wenn dieser zweyte Quotient geringer ist, als 3; so zeiget der Ueberrest nach der zweyten Division das laufende Jahr im größern Zirkel von 33 Jahren an, worinnen 32 ein gemeines Jahr ist. Wäre aber der zweyte Quotient 3 (größer kann er niemal seyn) so deutet der Ueberrest nach der zweyten Division das laufende Jahr im kleinern Zirkel von 29 Jahren an, worinnen das 28te ein gemeines Jahr ist.

5) Wenn sich der zweyte Ueberrest gerade auf mit 4 dividiren läßt; so ist das vorgegebene Jahr ein Schaltjahr, ausgenommen 32 im größern und 28 in kleinern Zirkel (N. 4)

6) Wenn nach der ersten, oder zweyten Division nichts das ist 0 übrig bleibt, so ist das vorgegebene Jahr ein Schaltjahr.

Z. E. 1) 1769 der gemeinen Zeitrechnung
1600
―――――
128) 169 ⎫
128 ⎭ 1 Erster Quotient
―――――
33) 41 ⎫
33 ⎭ 1 Zweyter Quotient
―――――
8 ein Schaltjahr im 2ten größern Zirkel von 33 Jahren.

2) 1836 der gemeinen Zeitrechnung
1600
―――――
128) 236 ⎫
128 ⎭ 1 Erster Quotient
―――――
33) 108 ⎭ 3 Zweyter Quotient
99
―――――
9 ein gemeines Jahr im kleinen Zirkel von 29 Jahren.

3) 1826
1600
―――――
128) 226 ⎫
128 ⎭ 1 Erster Quotient
―――――
33) 98 ⎫
66 ⎭ 2 Zweyter Quotient
―――――
32 ein gemeines Jahr im 3ten größern Zirkel von 33 Jahren.

4) 1855
1600

255 ⌉
128) 128 | 1 Erster Quotient

127 |
33) 99 | 3 Zweyter Quotient

28 ein gemeines Jahr im kleinern Zirkel von 29 Jahren.

5) 1856
1600

256 ⌉
128) 256 | 2 Erster Quotient

— 0 Ein Schaltjahr das letzte im zweyten größten Zirkel.

6) 1889
1600

289 ⌉
128) 256 | 2 Erster Quotient

33 |
33) 33 | 1 Zweyter Quotient

— 0 ein Schaltjahr das letzte im ersten größern Zirkel

7) 1922
1600

322 ⌉
128) 256 | 2 Erster Quotient

66 |
33) 66 | 2 Zweyter Quotient

— 0 Ein Schaltjahr das letzte im zweyten großen Zirkel

8)

```
8)          1955
            1600
       ─────────────
            355 ⎫
1 2 8)      256 | 2 Erster Quotient
       ─────────────
             99 | 3 Zweyter Quotient
  3 3)       99 ⎭
       ─────────────
              0  Ein Schaltjahr das letzte im dritten
                 größern Zirkel.
```

§. 87.

Um nun den Sonntagsbuchstaben zu finden; 1) Multipliciret man den ersten Quotienten mit 2. 2) Zum Product thut man den zweyten Quotienten, und nennt die Summe V. welche anzeiget, um wieviel der Sonntagsbuchstab von Ao. 1600 an bis auf das vorgegebene Jahr nach dem Schalttage vorwärts gegangen ist (§. 17.). 3) Zum Ueberrest nach der zweyten Division thut man soviel Einheiten, als Schaltjahre (das ist die Zahl 4) darinnen stecken, (§. 16.) und nennet die Summe R. diese deutet an, um wieviel der Sonntagsbuchstab rückwärts gegangen ist. 4) Man zieht V. vor R, oder R. von V. ab, und wirft von der differenz 7 so oft weg, als sichs thun läßt, so zeigt der Ueberrest an, um wieviel der Sonntagsbuchstab von A entweder vor oder rückwärts gegangen ist. Ist V größer als R, so ist er um so viel von A vor sich gegangen, als sie differiren. Ist aber V kleiner als R, so ist er um so viel von A zurücke gegangen. Die Disposition der Buchstaben bleibt wie §. 17.

```
Im ersten Exempel (§. 86.) war der erste Quot.   1
                                        mit      2 multipl.
                                               ─────
                                        giebt    2
                     Dazu den zweyten Quot.      1
                                               ─────
                                        giebt    3 V
```

 Der

Der Ueberrest nach der zweyten Division war 8
Darinnen steckt 4 2 mal.

1 0 R.
3 B.

7) 7 | 1
7

0 A B

Im 2ten Exempel ist der erste Quotient 1
mit 2 multipl.

giebt 2
Dazu den zweyten Quotienten 3

5 B.

Der Ueberrest nach der zweyten Division war 9
Darinnen steckt 4 2 mal

1 1 R.
5 B.

6 rückw. B.

Im dritten Exempel ist der erste Quotient 1
mit 2 multipl.

giebt 2
Dazu den zweyten Quotienten 2

4 B

Der Ueberrest nach der zweyten Division war 3 2
Darinnen stecken Schaltjahre 7 (§. 84.)

3 9 R
4 B

3 9

7 fünf-

das ist	3 9
7 fünfmal abgezogen, oder	3 5
Verbleibt	0 A

Im vierten Exempel ist der erste Quotient	1
mit	2 multipl.
giebt	2
Dazu den zweyten Quotienten	3
	5 B
Der Ueberrest nach der zweyten Division ist	2 8
Darinnen stecken Schaltjahre	7
	3 5 R
	5 B
	3 0
7 viermal abgezogen, oder	2 8
	2 rückw. F

Im fünften Exempel ist der erste Quotient	2
mit	2 multipl.
giebt	4 B. vorw. E

Im sechsten Exempel ist der erste Quotient	2
mit	2 multipl.
giebt	4
Dazu den zweyten Quotienten	1
	5 B. F

Man muß demnach von A 5 weiter vor sich zählen, so kömmt man auf F.

Im siebenten Exempel ist der erste Quotient 2
mit 2 multipl.
giebt 4
Dazu der zweyte Quotient 2
6 V. vorwärts G.

Im achten Exempel endlich ist der erste Quotient 2
mit 2
giebt 4
Dazu den zweyten Quotienten 3
7
7 einmal weggeworfen 7
Verbleibt 0 A

Dritter Abschnitt.

Wie die Zeit des Frühlings-Æquinoctii für ein jedes gegebenes Jahr in dieser Jahrseinrichtung zu finden.

§. 86.

Weil wir das tropische Jahr (§ 79.) zu 365 Tagen, 5 Stunden, 48 Min. 45 Sec. angenommen haben; so bekömmt auch unsere folgende Aequinoctialtafel eine andere Gestalt, als die obige (§ 26.)

Laufen-

Laufendes Jahr im Zirkel.		Tag des Æquinoctii im Märzen.		Uhr	M.	Sec.
Schaltj.	0	20	Vormit.	9	26	—
	1	—	Nachmit.	3	14	45
	2	—	Nachmit.	9	3	30
	3	21	Vormit.	2	52	15
Schaltj.	4	20	Vormit.	8	41	—
	5	—	Nachmit.	2	29	45
	6	—	Nachmit.	8	18	30
	7	21	Vormit.	2	7	15
Schaltj.	8	20	Vormit.	7	56	—
	9	—	Nachmit.	1	44	45
	10	—	Nachmit.	7	35	30
	11	21	Vormit.	1	22	15
Schaltj.	12	20	Vormit.	7	11	—
	13	—	Nachmit.	0	59	45
	14	—	Nachmit.	6	48	30
	15	21	Vormit.	0	37	15
Schaltj.	16	20	Vormit.	6	26	—
	17	—	Nachmit.	0	14	45
	18	—	Nachmit.	6	3	30
	19	—	Nachmit.	11	52	15
Schaltj.	20	—	Vormit.	5	41	—
	21	—	Vormit.	11	29	45
	22	—	Nachmit.	5	18	30
	23	—	Nachmit.	11	7	15

Laufen-

Laufendes Jahr im Zirkel.		Tag des Æquinoctii im Märzen.		Uhr	M.	Sec.
Schaltj.	24	20	Vormit.	4	56	—
	25	—	Vormit.	10	44	45
	26	—	Nachmit.	4	33	30
	27	—	Nachmit.	10	22	15
Schaltj.	28	—	Vormit.	4	11	—
In einem kleineren Zirkel von 29 Jahren.						
	28	21	Vormit.	4	11	—
	29	20	Vormit.	9	59	45
	30	—	Nachmit.	3	48	30
	31	—	Nachmit.	9	37	15
	32	21	Vormit.	3	26	—
Schaltj.	33	20	Vormit.	9	14	45

§. 87.

Vergleicht man nun das 0 Jahr im größern Zirkel mit dem 33ten, so zeiget sich, daß das Aequinoctium nach einem größeren Zirkel um 11 Min. 15 Sec. folglich nach dreyen Zirkeln um 33 Min. 45 Sec. zurücktritt. Und wenn man eben dieses 0 Jahr mit dem 29ten im kleineren Zirkel von 29 Jahren vergleichet; so ergiebt sich, daß nach Verfluß eines solchen kleinen Zirkels das Aequinoctium um 33 Min. 45 Sec. weiter fortrücket. Wenn man demnach 3 größere und einen kleineren Zirkel mit einander verbindet; so ist klar, daß das Aequinoctium nach Verfluß eines solchen größten Zirkels von 128 Jahren um eben so viel zurücke tritt, als es weiter vor sich geht; folgsam daß sich beyde, der Zurück- und

Vor-

Vorgang des Aequinoctii, gegen einander genau compensiren. a) Und dieß bestättiget dasjenige vollkommen, was wir hieoben (§. 79.) gesaget haben.

§. 88.

Will man demnach die eigentliche wahre Zeit des Aequinoctii für ein gegebenes Jahr auf das genaueste wissen; so multipliciret man den zweyten Quotienten (§ 79.) mit 11 Min. 15 Sec. so zeiget das Product, wie viele Min. von der in der Tabelle gefundenen Zeit abgezogen werden müssen, um die wahre Zeit des Aequinoctii auf das genaueste zu bestimmen.

Wir geben hiervon folgendes Beyspiel.

Im 2ten Exempel (§. 86.) ist der zweyte Quotient 3; dieser mit 11 Min. 15 Sec. multipliciret, giebt 33 Minuten, 45 Sec. Der Ueberrest 9 zeiget in der Aequinoctialtabell den 20ten März um 1 Uhr, 44 Min. 45 Sec. Nachmittag. Hiervon zieht man die oben gefundenen 33 Min. 45 Sec. ab; so verbleibt zur wahren Zeit des Æquinoctii im Jahre Christi 1836 der 20te März um 1 Uhr, 11 Min. Nachmittag; wenn nämlich das tropische Jahr auf das allergenaueste 365 Tage, 5 Stunden, 48 Min. und 45 Sec. ausmachet, wie wir angenommen haben.

a) Man multiplicire den Unterschied eines tropischen Jahres von einem gemeinen, so 5 St. 48 Min. 45 Sec. ausmachet, mit 128, so kommen gerade 31 Tage heraus, so viel wir nämlich in dieser Zeit einschalten.

§. 89.

Die protestantischen Stände des Reichs haben deswegen den 33jährigen und alle übrige combinirte Zirkel verworfen, weil sie dafür hielten, daß, um eine richtige Einschaltung zu erhalten, die Kenntniß der eigentlichen Größe des tropischen Jahres unumgänglich nöthig wäre. Wir getrauen uns aber zu zeigen, daß sie gar nicht dazu nöthig ist. Wir haben schon oben (§. 12.) bewiesen, das, wenn man einen einfachen Zirkel gebrauchen will, keiner als der von 33 Jahren der Sache am nächsten tritt. Wir haben weiters gezeiget, (§. 79.) daß das tropische Jahr nicht größer als 365 Tage, 5 St. 48 Min. 49 Sec., und nicht kleiner als 365 Tage, 5 St. 48 Min. 45 Sec., nach den bewährtesten Observationen seyn könne. Wir haben hiernächst die letztere Quantität des tropischen Jahres, welche Mr. de la Lande für die richtigste angiebt, darum erwählet, weil sie sich für einen combinirten großen Zirkel von dreyen größern Zirkeln zu 33 Jahren, und einen kleinern zu 29 Jahren, die zusammen 128 Jahre ausmachen, am besten schickt.

§. 90.

Wollte man mit Beybehaltung dieser Größe des tropischen Jahres 4 größere Zirkel zu 33 Jahren, und einen kleinern zu 29 Jahren mit einander combiniren, und einen zusammen gesetzten Zirkel daraus machen; so würde sich ein Unterschied von 11 Min. 15 Sec. ergeben; und dieser Unterschied würde desto beträchtlicher werden, je öfter man den größern Zirkel gebrauchete. Noch größer aber würden diese Differenzen anwachsen, wenn das tropische Jahr größer wäre, als wir es angenommen haben.

§. 91.

§. 91.

Man versuche es auch mit andern Zirkeln. Man combinire z. E. einen 37jährigen 2 = oder 3mal mit einem 25 = oder 29jährigen ꝛc. Man nehme das tropische Jahr nach verschiedenen möglichen Größen an; so wird man allemal finden, daß keine einzige Zirkel=Combination der Sache so nahe tritt, als die unsrige; und daß folglich keine einzige Einschaltungsart in der Welt bequemer sey, als die 33jährige im ersten Theile, wenn man einfache Zirkel haben will: und keine andere, als die 128jährige in diesem zweyten Theile, wenn man zusammen gesetzte Zirkel verlanget.

§. 92.

Sollte endlich einmal die Größe des tropischen Jahres bis auf Tertzen genau ausfindig gemacht werden; so darf man darum unsere Zirkel nicht ändern: sondern man machet sich eine neue Aequinoctialtafel, welche auf die wahre Größe des tropischen Jahres eingerichtet ist. Dieß hat nicht die geringste Schwürigkeit; weil solche Tafel aus der bloßen Addition des Unterschieds eines gemeinen Jahres zu 365 Tagen von einem tropischen entspringt, wie wir schon oben gezeiget haben. §. 26.) Man wird alsdann gleich sehen, wie viel nach einem jeden Zirkel das Æquinoctium entweder zurücke oder vor sich gehet: und hienach kan man die (§. 28.) an Hand gegeqene Correction vornehmen. Hieraus veroffenbaret sich abermal, wie wenig man sich in Erwählung einer aus den von uns vorgeschlagenen Einschaltungs=Arten an der Größe des tropischen Jahres aufzuhalten habe.



Vierter Abschnitt.

Von der Art und Weise den österlichen mittleren Vollmond im combinirten Kalender zu finden.

§. 93.

Wir beziehen uns vor allen auf den 4ten Abschnitt unsers ersten Theils. Unsere Epaktentafel bekömmt aber, weil wir hier zweyerley Quotienten und verschiedene Zirkel haben, eine andere Gestalt, als die hieroben (§.44.) Die Epakte für einen ganzen Zirkel zu 33 Jahren thut 4 Tage, 12 Stunden, 26 Min. 28 Sec. genau: und diese 3mal genommen, (das ist für 3 Zirkel oder 99 Jahre), 13 T. 13 St. 19 M. 24 Sec. Thut man zu der Epakte von einem kleinern Zirkel zu 29 Jahren, 20 T. 1 St. 9 M. 6 ″ 20‴. hinzu, und zieht von der Summe eine ganze Mondsrevolution zu 29 T. 12 St. 44 M. 3 ″. 10‴ ab; so giebt der Ueberrest die Epakte für den zusammen gesetzten Zirkel von 128 Jahren, zu 4 T. 1 St. 44 M. 27 Sec. und 10‴. Aus diesen Gründen ist nun unsere folgende Epaktentafel durch die bloße Addition entsprungen.



Epacten-

Epaktentafel. Epoche An. 1600 den 29. März, 3 U. 9 Min.

No. 1. Combinirte Zirkelepakten.

1ter Quot.	Epakten. Tage.	St.	M.	Sec.
1	4	1	44	27
2	8	3	28	54
3	12	5	13	21
4	16	6	57	48
5	20	8	42	15
6	24	10	27	43
7	28	12	12	10
8	3	1	12	34
9	7	2	56	1
10	11	4	40	28
11	15	6	24	55
12	19	8	9	22
13	23	9	53	49
14	27	11	38	16
15	2	—	38	40
20	22	9	20	56
30	4	1	17	21
40	15	5	57	49
50	26	10	38	17
60	8	2	34	42
70	19	7	15	10
80	—	23	11	35
90	12	3	52	3
100	23	8	32	31

No. 2. Einfache Zirkel-Epakten.

2ter Quot.	Epakten. Tage	St.	M.	Sec.
1	4	12	26	28
2	9	—	52	56
3	13	13	19	24

No. 3. Jahres-Epakten.

Ueberrest.	Epakten. Tage	St.	M.	Sec.
1	10	15	11	22
2	21	6	22	44
3	2	8	50	3
4	14	0	1	25
5	24	15	12	47
6	5	17	40	6
7	16	8	51	28
8	28	—	2	50
9	9	2	30	9
10	19	17	41	31
11	—	20	8	50
12	12	11	20	12
13	23	2	31	34
14	4	4	58	53
15	14	20	10	15
16	26	11	21	37
17	7	13	48	55
18	18	5	—	17
19	28	20	11	39
20	10	22	38	59
21	21	13	50	20
22	2	16	17	39
23	13	7	29	1
24	24	22	40	23
25	6	1	7	42
26	16	16	19	4
27	27	7	30	26
28 (im größ. Zirk.)	9	9	57	45
(im klein. Zirk.)	8	9	57	45
29	20	1	9	7
30	1	3	36	26
31	11	18	47	48
32	22	9	59	9
33	4	12	26	28

Die Monds-Revolutionen findet man schon oben in der Tabelle (§ 44.)

Weil 13 große Zirkel 1664 Jahre ausmachen, so darf man nur eine 13fache combinirte Zirkel-Epakte mit 23 T. 9 St. 53 Min. 49 Sec. zur obigen Epoche der 29 T. 3 St. 9 Min. hinzuthun; und von der Summa eine ganze Revolution von 29 T. 12 St. 44 Min. 3 Sec. hinweg nehmen; so verbleibt der 23te März. — St. 18 M. 46 Sec zur Epoche des mittl Vollm. im 64ten Jahre vor der gemeinen Zeitrechnung.

§. 94.

Wenn man demnach die Zeit des mittlern Vollmonds im Märzen für jedes vorgegebene Jahr wissen will; so sucht man 1) den ersten Quotienten in der Tafel Nro 1 auf, und nimmt die damit correspondirende Epacte; 2) Eben so excerpiret man die mit dem zweyten Quotienten correspondirende Epacte Nro. 2, und 3) diejenige Epacte Nro. 3, welche dem Ueberrest zukömmt. 4) Man bringt alle drey Epacten in eine Summa, und zieht 5) soviel Revolutionen davon ab, als sichs thun läßt; so zeigt die verbleibende Zahl, um wieviel Tage, Stunden, Minuten ꝛc. der mittlere Vollmond im Märzen seit Ao. 1600 bis auf das vorgegebene Jahr zurückgegangen ist. Man zieht also 6) diese verbleibende Zahl vom 29ten Märzen 3 Uhr und 9 Minuten ab, (an welchem Tage sich im Jahr 1600 der mittlere Vollmond zu Rom ereignet hat; (§. 43.):) so zeigt der Ueberrest den Tag, die Stunde, Minute ꝛc. des mittleren Vollmonds im Märzen für das vorgegebene Jahr.

Nehmen wir das erste Exempel (§. 86.) vom Jahr 1769 da ist der erste Quotient 1, hiemit correspondiret Nro. 1 die

Epacte	4 T.	1 St.	44 M.	27 Sec.
Der zweyte Quotient ist auch 1, dieser hat zur Epacte Nro. 2,	4 T.	12 St.	26 M.	28 Sec.
Der Ueberrest 8 hat zur Epacte N. 3,	28 T.	0 St.	2 M.	50 Sec.
thut zusammen	36 T.	14 St.	13 M.	45 Sec.
Eine ganze Rev. davon abgez. mit	29 T.	12 St.	44 M.	3 Sec.
Verbleiben	7 T.	1 St	29 M.	42 Sec.
abgezogen von	29	3	9	—
Vollmond im Märzen den	22 um	1 U.	39 M.	18 Sec.

Dieß

Dieß trift mit der obigen Berechnung (§. 49.) vollkommen überein und eben den Tag weißt auch der Gregorianische Kalender.

§. 95.

Wenn der solchergestalt gefundene Tag des Vollmonds vor dem Aequinoctio fällt; so ist er nicht österlich: man muß also noch eine Revolution dazu thun, und von der Summe den ganzen März mit 31 Tagen abziehen; so zeigt der Ueberrest den Tag, und die Stunde ꝛc. des mittlern österlichen Vollmonds im April.

Nehmen wir das zweyte Exempel (§. 86.) vom Jahr 1836 da ist der erste Quotient 1. Hiemit correspondiret Nro. 1, die

Epacte	4 T.	1 St.	44 M.	27 Sec.
Der zweyte Quotient 3 hat die Epacte Nro. 2,	13 T.	13 St.	19 M.	24 Sec.
Der Ueberrest 9 Nro. 3	9 T.	2 St.	30 M.	9 Sec.
thut zusammen	26 T.	17 St.	34 M.	— Sec.
abgezogen von	29 T.	3 St.	9 M.	— Sec.
Vollmond im Märzen den	2 um	9 U.	35 M.	— Sec.
dazu eine Revolution Nro. 4,	29	12	44	3
	31 T.	22 St.	19 M.	3 Sec.

Also fällt der mittlere Vollmond Ao. 1836 auf den 1ten April um 10 Uhr 19 Minuten 3 Secunden Vormittag (a).

Im

(a) Diesen Tag zeigt auch der Gregorianische Kalender, welcher nach seinem Schalttage eben den Sonntagsbuchstaben, wie der unsrige, nämlich B hat.

Im 8ten Exempel (§. 86.) vom Jahr 1955 ist der erste Quotient 2, dieser hat Nro. 1, die Epaete

	8 T. 3 St. 28 M. 54 Sec.
Der zweyte Quotient 3,	13 T. 13 St. 19 M. 24 Sec.
Der Ueberrest 0 . .	— — — —
thut zusammen	21 T. 16 St. 48 M. 18 Sec.
abgezogen von	29 T. 3 St. 9 M. —
Vollmond im Märzen den	7 um 10 U. 20 M. 42 Sec.
dazu eine ganze Revolution	29 T. 12 St. 44 M. 3 Sec.
	36 23 4 45
abgezogen den Märzen mit	31 — — —
Vollmond im April den	5 um 23 U. 4 M. 45 Sec.

das ist den 6ten April um 11 Uhr 4 Minute 45 Secunden Vormittag (a)

Diese Exempel mögen gnug seyn, unsre Regel vom Vollmond zu erläutern. Nun ist uns nichts mehr übrig als der

Fünfte

(a) Der Gregorianische Kalender zeigt den 5ten April, welches der nämliche Freytag ist, der in unserm Kalender der 6te heißt. Denn der gregorianische hat das ganze Jahr hindurch B: der unsrige aber nach dem Schalttage A.

Fünfter Abschnitt.

Von Reduction der Tage unsers Kalenders auf den gregorianischen und julianischen, in einem jeden vorgegebenen Jahre, und wie unser Kalender-System auch auf die Jahre vor An. 1600 angewendet werden könne.

§. 96.

Was die Reductiou unsers Kalenders auf den gregorianischen und julianischen anbelanget; so geht es eben so damit zu, wie wir oben (§§. 68. u. f.) an Hand gegeben haben. Man sucht nämlich die Sonntagsbuchstaben für jeden Kalender, und vergleicht sie mit einander, wenn der gregorianische Kalender, vorwärts gezählet um einen, zween oder mehr Buchstaben mehr hat als der unserige, so thut man zu unsern Tagen so viel Einheiten hinzu, als diese Differenz betragt, um den nämlichen Tag im gregorianischen Kalender zu haben, und umgekehrt. Z.E. Unser Kalender hätte den Buchstaben A, der gregorianische aber B; so wäre der 20te März in unserm Stylo der 21te im gregorianischen. Wenn hingegen unser Kalender D, und der gregorianische C hätte, so wäre der 20te März unsers Kalenders der 19te im gregorianischen.

Will man aber wissen, was der vorgegebene Tag unsers Kalenders für ein Tag im julianischen sey; so reduciret man ihn zuerst besagter massen auf den gregorianischen (§. 70.) und diesen hernach auf den julianischen.

Man fragt znm Exempel was der 20te März 1768 unsers Kalenders für ein Tag im Julianischen sey? Hier haben wir

den Sonntagsbuchstaben nach dem Schalttage C. Der Gregorianische aber B; folglich ist der 20te März unsers Kalenders der 19te im Gregorianischen. Dieser differiret um 11 Tage von Julianischen (§. 70); der 8te März nach Julianischen Styl ist demnach der 19te im gregorianischen, und der 20te in unserm Kalender.

§. 97.

Will man aber unser Kalender-System auf die Jahre vor Ao. 1600 anwenden; so darf man nur, weil 13 combinirte große Zirkel 1664 Jahre ausmachen, zu dem vorgegebenen Jahre 64 addiren, und im übrigen mit der doppelten Division verfahren, wie oben (§. 84.). Und gleichwie der Sonntagsbuchstab nach Verfluß eines großen combinirten Zirkels um 2 Buchstaben vorwärts geht (§. 82.); so geht er um soviel rückwärts, wenn man zurück zählet. Dieß macht nach Verfluß von 13 Zirkeln 26, das ist über 3 complete Wochen noch 5 Buchstaben. Man darf also 2) nur den doppelten ersten Quotienten zu dem zweyten addiren, wie hieroben (§. 84.) und von der Summa 5 abziehen, so zeigt der Ueberrest (nachdem 7 so oft davon weggeworfen worden) als sichs thun läßt, um wieviel der Sonntagsbuchstab vorwärts geht (a). 3) Zum Ueberrest nach der zweyten Division thut man soviel Einheiten: als Schaltjahre darinnen sind, und wirft von der Summa so oft 7 hinweg als sichs thun läßt; so

---

(a) Wäre die Summa des doppelten ersten und des zweyten Quotienten weniger als der Ueberrest samt seinen Schaltjahren, so thut man 7 dazu, und zieht hernach diesen Ueberrest samt seinen Schaltjahren davon ab. Zum Exempel der erste Quotient wäre 1 der zweyte auch 1; und der Ueberrest samt den Schaltjahren 5; so wäre die Summa von doppelten ersten und einfachen zweyten Quotienten 3. Hierzu thut man 7 geben 10. Hiervon 5 abgezogen, verbleiben 5: um soviel geht der Sonntagsbuchstab vorwärts.

so zeigt die verbleibende Zahl, um wieviel der Sonntagsbuchstab zurückgegangen ist. 4) Diese Zahl zieht man von der Nro. 2. gefnndenen ab; so zeigt der Ueberrest, um wieviel der Sonntagsbuchstab vorwärts geht. (a)

Man fragt zum Exempel was das Jahr 325 für einen Sonntagsbuchstaben habe? 3 2 5
so thut man hinzu . . . 6 4

Summa		3 8 9	3 Erster Quotient
Dividiret mit	128)	3 8 4	
diese weiter dividiret mit	33)	5	0 Zweyter Quotient
		0	
Ueberrest nach der 2ten Division		5	
darunter ist		1	Schaltjahr
		6	
Der erste Quot. zweymal genommen ist		6	
den zweyten dazu		0	
Summa		6	
Davon abgezogen		5	
bleibt		1	
Dazu		7	
		8	
Hiervon abgezogen		6	Nro. 3.
Verbleiben		2	Vorwärts

Also ist der Sonntagsbuchstab in diesem Jahr C.

(a) Wenn die Nro, 2 gefundene Zahl kleiner ist, als die Nro. 3; so thut man 7 hinzu, und verfährt hernach mit der Subtraction, wie hiervor gemeldet wird. Auf diese Art darf man die Buchstaben niemal rückwärts zählen.

```
                 387
                  64
                ------
                 451 ] 3 Erster Quotient
        128)     384 ]
                ------
                  67 ] 2 Zweyter Quotient
         33)      66 ]
                ------
       Ueberrest   1
                ------
Erster Quotient 2mal   6
Dazu den zweyten       2
                ------
                       8
Davon abgezogen  . .   5
                ------
         Verbleiben    3
   weiter abgezogen    1 Nro. 3
                ------
         Verbleiben    2 Vorwärts;
```

folglich ist der Sonntagsbuchstab auch in diesem Jahr C.

§. 98.

Das Frühlings-Aequinoctium wird eben so, wie oben (§§. 24. 87.) gefunden: weil dasselbe nach Verfluß von 128 Jahren weder vor sich noch zurückgeht. Und so wird man finden, daß es im Jahr 325 auf den 20ten Märzen, um 2 Uhr 29 Min. 45 Secunden Nachmittag, und im Jahr 387 auf den 20ten Märzen, um 2 Uhr 52 Minuten 15 Secunden fällt; wenn nämlich bey diesen letztern der zweyte Quotient 2, mit $11\frac{1}{4}$ Minuten multipliciret, von der in der Aequinoctial-Tafel gefundenen Zeit abgezogen wird.

§. 99.

Eben so verfähret man wie oben (§ §. 47.) um den österlichen mittlern Vollmond zu finden, nur mit dem Unterschied, daß

daß man, an statt der Epoche vom Jahr 1600, so auf den 29ten Märzen, 3 Uhr 9 Minuten gestellet ist, die Epoche von Ao 64 vor der Æra vulgari annimmt, welche wir oben (§. 93.) bey der Epactentafel) auf den 23ten Märzen — Uhr 18 Minuten heraus gebracht haben. Von dieser (allenfalls mit einer ganzen Revolution vermehret) wird die Summe der drey Epacten die dem ersten und zweyten Quotienten, und dem Ueberrest zukommen, abgezogen, so zeigt das Residuum den Tag, Stunde und Minute im Märzen, wo sich der österliche mittlere Vollmond zu Rom im vorgegebenen Jahre ereignet

Beym Jahr 325 war der erste Quotient 3, dieser giebt

in der Epactentafel Nro. 1,	12 T.	5 St.	13 M.	21 Sec.
Der zweyte Quotient 0	—	—	—	—
Der Ueberrest 5, Nro 3	24 T.	15 St.	12 M.	47 Sec.
thut zusammen . .	36 T.	20 St.	26 M.	8 Sec.
eine Revolution abgezogen	29 T.	12 St.	44 M.	3 Sec.
Verbleiben . . .	7 T.	7 St.	42 M.	5 Sec.
Diese von der Epoche abgezogen nämlich von . .	23 T.	— St.	18 M.	— Sec
Vollmond im März den	15 um	16 U.	35 M.	55 Sec.

Weil er aber vor dem Aquinoctio fällt, so ist er nicht österlich; man muß demnach eine Revolution dazu thun, und den Märzen mit 31 Tagen abziehen, so kömmt heraus der 14te April 5 Uhr 19 Minuten 58 Secunden Nachmittag zur Zeit des österlichen mittlern Vollmonds im Jahr 325

Beym Jahr 387 war der erste Quotient 3, dieser giebt				
in der Epactentafel Nro. 1,	12 T.	5 St.	13 M.	21 Sec.
Der zweyte Quot. 2 giebt Nro. 2	9 T.	—	52 M.	56 Sec.
Der Ueberrest 1 Nro. 3;	10 T.	15 St.	11 M.	22 Sec.
Zusammen . . .	31 T.	21 St.	17 M.	39 Sec.
Hiervon abgezogen eine ganze Revolution mit .	29 T.	12 St.	44 M.	3 Sec.
Verbleiben	2 T.	8 St.	33 M.	36 Sec.
Diese abgezogen von der Epoche nämlich von . .	22 T.	— St.	18 M.	—
Vollmond im Märzen den	20 um	15 U.	44 M.	24 Sec.

Dieß trift auf 13 Minuten nahe mit obiger Berechnung (§. 75.) zusammen. Der Unterschied liegt in den Epacten, weil unsere letztere Epacten-Tafel viel genauer und zuverläßiger berechnet ist, als die erstere; (§. 44.) wo die Secunden nicht in Betrachtung genommen worden sind.

Ostern wurde demnach in diesem Jahr irrig den 25ten April in mense Impurorum celebriret, wie wir schon hieroben (§. 75.) gesehen haben.

§. 100.

Will man beständig das 64ste Jahr vor der gemeinen Zeitrechnung für das 0 Jahr unsrer Kalender-Epoche annehmen; so gilt es gleichviel, und die Regel bleibt durchaus einerley.

Zum

Zum Exempel sey das laufende Jahr

	1 7 6 9	
	6 4	
1 2 8)	1 8 3 3 } 1 4	Erster Quotient
	1 2 8	
	5 5 3	
	5 1 2	
3 3)	4 1 } 1	zweyter Quotient
	3 3	
Ueberrest	8	ein Schaltj. im 2. größ. Zirkel
darunter sind	2	Schaltjahre
	1 0	
7 weg	3	rückwärts
Erster Quotient zweymal	2 8	
davon abgezogen	5	
	2 3	
Zweyter Quotient . .	1	
21 davon weg	2 4	
Verbleiben	3	vorwärts
	0	

Also ist der Sonntagsbuchstab A

Der Ueberrest 8 ist dem obigen (§. 94.) gleich, folglich zeigt er auch in der Aequinoctial-Tafel den nämlichen Tag des Aequinoctii.

Der

Der erste Quotient 14 giebt in der Epacten-Tafel

Nro. 1 . . .	27 T. 11 St. 38 M. 16 Sec
Der zweyte Quot. 1 Nro. 2,	4 T. 12 St. 26 M. 28 Sec.
Der Ueberrest 8 Nro. 3,	28 T. 0 — 2 M. 50 Sec.
Zusammen	60 T. — St. 7 M. 34 Sec.
zwey Revolutionen abgezogen	59 T. 1 St. 28 M. 6 Sec.
Verbleiben	— T. 22 St. 39 M. 28 Sec.
diese abgezogen von der Epoche Ao. 64 vor der Æra vulgari.	23 T. — St. 18 M. — Sec.
Vollmond im Märzen den wie hieroben (§. 94.).	22 um 1 U. 38 M. 32 Sec.

§. 101.

Noch besser würde man fahren, wenn man eine Anzahl combinirter Zirkel die sich mit 7 dividiren läßt, zum Exempel 14, oder 1792 Jahre, vor dem Jahr 1600 vorausgehen ließe. Denn da würde man auf das Jahr 192 vor der Æræ vulgari kommen, welches eben sowohl ein Schaltjahr ist, und nach dem Schalttage den nämlichen Sonntagsbuchstaben A hat, wie das Jahr 1600. Man dörfte demnach zum gegebenen Jahre nur 192 hinzuthun, und alsdann durchgehends nach der Regel (§. 87.) verfahren, ohne an dem doppelten Quotienten etwas zu ändern.

Die Zeit des Märzen-Vollmonds zu finden, thut man eine Epacte von 14 combinirten Zirkeln (anstatt der 13 oben §. 93) zu 29 Tagen 3 Stunden 9 Minuten, welches die Epoche Ao. 1600 war (§. 43.). Auf solche Weise bekömmt man

die

Zeit des mittlern März-Vollmonds im Jahr der neuen Epoche nämlich Ao. 192 vor der gemeinen Zeitrechnung auf den 27 März um 2 Uhr 3 Minuten 13 Sec.

§. 102.

Man begreift leicht, daß man solchergestalt die Sonntagsbuchstaben für die Jahre der Eochen aus einem jeden Jahre worinnen man sich befindet, bestimmen könne. Ich sehe zum Exempel in dem 1769sten Kalender, den ich vor mit habe, daß sich dieses Jahr mit einem Sonntage endiget, und daß also das folgende 1770te Jahr mit einem Montage anfängt; folglich kann dasselbe keinen andern Sonntagsbuchstaben als G haben.

Nun thut man zu 1770 die Zahl 192, und verfährt durchgehends wie oben (§. 87.) wo sich dann zeiget, daß in dieser Zeit der Sonntagsbuchstab um 6 vor sich gegangen ist. Da er nun Ao. 1770 G ist; so muß er nothwendig Ao. 192 vor der Æra vulgari A gewesen seyn; denn von A auf G gezählet sind 6 Buchstaben.

Nach dem Gregorianischen Styl ist es eben so. Man nimmt das geringere von dem vorgegebenen Jahr für die Epoche an, und zieht so oft 400 ab, als sichs thun läßt, und verfährt weiter wie oben (§. 68.); so zeigt die zuletzt verbleibende Zahl, um wieviel der Sonntagsbuchstab in der Zwischen-Zeit rückwärts gegangen ist. Zum Exempel; man wollte aus dem bekannten Sonntagsbuchstaben von Ao. 1770 den fürs Jahr 1600 wissen; so zieht man von 1770 das

Jahr 1600 ab; verbleiben 170 Jahre; hierzu den 4ten Theil davon mit 42 Jahren, thut 212, hiervon abgezogen die erste Ziffer vom Rest, nämlich 1. Verbleiben 211. Diese mit 7 dividiret, bleibt im Rest, 1 folglich ist der Sonntagsbuchstab von 1600 bis 1770 um 1 zurückgegangen. Da er nun Ao. 1770 G ist, so muß er nothwendig Ao. 1600 A gewesen seyn.

§. 103.

Was den Julianischen Kalender anbelangt; so muß man aus dem gegebenen Jahr den Sonntagsbuchstaben für das 0 Jahr der Æræ vulgaris zu bestimmen suchen. Wir haben im nächstvorhergehenden §. aus dem Jahr 1770 den Gregorianischen-Sonntagsbuchstaben A für das Jahr 1600 nach dem Schalttage herausgebracht. Dieß war eben so, wie im Julianischen Kalender ein Schaltjahr. Weil nun Gregorius XIII Ao. 1582 aus dem Kalender 10 Tage ausgemärzet hatte, so differirten beyde Kalender Ao. 1600 noch um 10 Tage; (das ist 1 Woche 3 Tage) folglich konnte der Sonntagsbuchstab im Julianischen Kalender nach dem Schalttage kein anderer als E seyn. Nun sind von dem 0 Jahr bis auf 1600 eben soviel Jahre verflossen. Hiervon 1400 abgezogen (§. 69.) Verbleiben 200. Dieß Jahr hatte also den nämlichen Buchstaben E. In 200 Jahren sind 50 Schaltjahre, thut zusammen 250 Jahre; diese mit 7 dividiret verbleiben übrig 5: um soviel ist der Sonntagsbuchstab von 0 Jahr bis 200 zurückgegangen. Man zählet demnach von E 5 vorwärts; so kömmt man auf C. Dieß war der Sonntagsbuchstab für das 0 Jahr der Æræ vulgaris nach dem Schalttage, im Julianischen Kalender.

Man

Man darf also nur 1). Von einem jeden gegebenen Jahre 700 so oft wegziehen als sichs thun läßt; 2) den Ueberrest mit 4 dividiren und den Quotienten hinzuthun, und 3) die Summe mit 7 dividiren: was nach der Division übrig verbleibt, zeigt um wieviel man von C zurück zählen müsse, um den Sonntagsbuchstaben für das gegebene Jahr zu haben.

§. 104.

Will man lieber von A anstatt E zurückzählen; so ist klar, daß man die Summa Nro. 2 um 2 vermindern müsse; und dieß bestättiget abermal unsre oben (§. 69.) gegebene Regel, wo wir den Unterschied beyder Kalender im 0 Jahr aus den chronologischen datis des Julianischen Kalenders bestimmet, hier aber nichts anders als 1) beyde Jahrsformen 2) die Känntniß des Sonntagsbuchstaben vom Jahr 1770. Und 3) den Unterschied der Tage in beyden Kalendern vom Jahre 1600 vorausgesetzet haben.

Wenn ein Jahr vor der gemeinen Zeitrechnung gegeben wird; so zieht man dasselbe von 700 1400 ꝛc. ab, und verfährt hernach mit dem Ueberrest durchgehends, wie oben (§. 69.)

Man fragt z. E. was das Jahr 522 vor der gemeinen Zeitrechnung für einen Sonntagsbuchstaben habe? (welches die Chronologi, die das Jahr vor der Æra vulgari für 1 annehmen, das 523te nennen) so zieht man 522 von 700 ab, da verbleiben

	178 diese mit 4 dividiret
geben zum Quotienten	44
	222
hiervon abgezogen	2
Verbleiben	220 diese mit 7 dividiret,
bleiben übrig	3

Also zählet man von A 3 rückwärts; so kommt man auf E. Dieß ist der Julianische Sonntagsbuchstab im Jahr 522 vor der Æra vulgari.

§. 105.

Hieraus veroffenbaret sich Sonnenklar, wie unrecht diejenigen daran seyn, die da meynen, man könnte sich nicht auf die Sonnenzirkel verlassen, folglich auch die Wochentage, worauf die entfernten Jahre des Julianischen Kalenders anfangen, nicht sicher bestimmen. Die Leute bedenken nicht, daß diese Zirkel, ihre Erfindung mag sich herschreiben, von welcher Zeit sie immer wolle, allemal auf ganz gewisse gegenwärtige data gegründet, und eben so, wie wir hier gethan haben, nach der bekannten Julianischen Jahrsforme eingerichtet worden, folglich, so lang diese Jahrform zum Grunde genommen wird, sowohl vor- als rückwärts sicher einschlagen müssen. Ein anders wäre es, wenn mehr oder weniger Tage eingeschaltet worden wären, als die Julianische Jahrsform erfordert; denn da würde nicht von dem Julianischen, sondern von einem andern Kalender die Frage seyn. Jedoch wir werden hiervon in der Folge etwas mehrers sagen.

§. 106.

Nun wollen wir das Jahr 44 vor der Æra vulgari nach unserer neuesten Methode (§. 101.) berechnen.

	192	
	44	
	148 }	1 Erster Quotient
128)	128 }	
Ueberrest	20	ein Schaltjahr
darunter	5	Schaltjahre
	25	N.
der doppelte Erste Quotient	2	V.
	23	N.
7 dreymal weggeworfen	21	
Verbleiben	2	N. F G.

Also war der Sonntagsbuchstab in diesem Jahr vor dem Schalttage G und nach dem Schalttage F.

Suchen wir jetzt den Tag des mittlern Vollmonds im Märzen auf.

Der erste Quotient giebt in der

Epacten-Tafel Nro. 1,	4 T.	1 St.	44 M.	27 Sec.
der Ueberrest 20 Nro. 3,	10 T.	22 St.	38 M.	59 Sec.
Summa .	15 T.	— St.	23 M.	26 Sec.
abgez. von der Epoche (§. 101.)	27 T.	2 St.	3 M.	13 Sec.
Vollmond im März den	12	um 1 U.	39 M.	47 Sec.
dazu den Februar. mit	29 T.			
Summa	41 T.	1 St.	39 M.	47 Sec
abgezogen eine halbe Revol. mit	14 T.	18 St.	22 M.	1 Sec.
Neumond im Februar. den	26	um 7 U.	17 M.	46 Sec.
dazu den Jan. und December des vorgehenden Jahrs mit	62 T.	—	—	—
Summa . .	88 T.	7 St.	17 M.	46 Sec.
abgezogen zwey Revolut.	59 T.	1 St.	28 M.	6 Sec.
Neumond Ao. 45 vor der Æra vulg. im December den	29	um 5 U.	49 M.	40 Sec.

Der 29ste December hat den Buchstaben F, und weil diesem Jahr der Sonntagsbuchstab A zukömmt; so war der 29te December, als der Tag des Neumonds, ein Freytag.

Nun ist aus der Geschichte bekannt, daß Julius Cäsar das erste Jahr seiner Kalender-Verbesserung mit dem Tage des Neumonds angefangen hat. Dieser konnte 3 Jahre vor- und darnach nicht auf 3 Tage nahe zum 1ten Jänner fallen, folglich mußte dieses Jahr das 44te vor der Æra vulgari seyn. Da nun der Neumond auf einen Freytag fiel, so war dieser der 1te Jänner im neuen Julianischen Kalender; folglich konnte der Sonntagsbuchstab in diesem Jahr nach Julianischem Styl im Jänner und Hornung kein anderer als C seyn. Man bringt aber nach der Julianischen Berechnung (§. 104.) den Buchstaben B heraus; folglich konnte dieser nur vom Märzen an das übrige Jahr hindurch gelten. Also war dieses Jahr ganz unstreitig auch im Julianischen Kalender ein Schaltjahr: wiewohl einige daran zweifeln, denen es seltsam vorkömmt, wie Cäsar habe das erste Jahr seines Kalenders zum Schaltjahr machen, und doch dabey verordnen können, daß das vierte Jahr allemal ein Schaltjahr seyn sollte. Allein man bedenkt nicht, daß Cäsar hier unter dem 0 Jahr das erste seiner Kalender Epoche verstanden hat.

In der That mag dieses die Priester irre gemacht haben, die der Verordnung zu Folge im 4ten Jahr das erstemal einschalteten. Und weil sie wahrnahmen, daß unter dem ersten Jahr, wo Cäsar die Einschaltung befohlen hatte, und unter den 4ten 3 Jahre Unterschied waren; so meynten sie, aus einem groben Irrthum, es müßte immer so fortgehen, und schalteten im 7ten 10ten 13ten u. f. das ist, in 3 Jahren jedesmal

einen Tag ein. Und so hatten sie bis zu Ende des 37ten Jahres wirklich 12 Tage eingeschaltet, da es nur hätten 9 seyn sollen.

Augustus redressirte die Sache, da er befahl, daß man von Ao. 38 bis 52 incl. gar nicht mehr einschalten sollte, um die zuviel eingeschalteten 3 Tage wiederum hereinzubringen. Er ließ daher erst im 53sten Jahr, welches das 8te unserer gemeinen Zeitrechnung ist, das erstemal wiederum einschalten: und von solcher Zeit an ist die Einschaltung, nach der Jahrsforme des Julianischen Kalenders, ohne Unterbruch fortgegangen.

Eben dieß beweist auch wiederum sonnenklar, daß das erste Jahr der Julianischen Kalender-Verbesserung (das ist das 44te Jahr vor der Æra vulgari) ein Schaltjahr gewesen seyn müsse. Denn setzen wir, es wäre ein gemeines Jahr gewesen; so hätte Augustus, um die behörige Correction vorzunehmen, nicht im 53ten sondern im 52ten Jahr der neuen Kalender-Epoche einschalten müssen. Vom ersten Jan. des ersten Jahrs bis ersten Jan. des 53sten Jahrs, wo die neue Einschaltung, nach einem Stillstand von 15 Jahren, noch nicht geschehen, waren 52 Jahre verflossen. Solche Zeit hindurch hätten also nach dem Julianischen Kalender-System, 13 Tage eingeschaltet werden sollen. Die Priester hatten aber nur 12 eingeschaltet (vom ersten Jan. des 4ten Jahrs bis den ersten Jan. des 38sten Jahrs gerechnet). Also mußte nothwendig vorher schon noch ein Tag eingeschaltet worden seyn. Und das konnte wohl nicht anderst als im ersten Jahr der Kalender-Verbesserung geschehen. Wie hätten auch sonst vom ersten Jan. des ersten Jahrs, bis zum ersten Jan. des 54sten Jahrs der Kalender-Verbesserung, wo alles wiederum in Ordnung gebracht worden, und der Sonn-

tags-

tagsbuchstab F war, 53 † 13, zusammen 66 Tage, oder über die completen Wochen noch 3 Tage (von C nämlich bis F) verfließen können, wenn das erste Jahr der Julianischen Kalender-Verbesserung kein Schaltjahr gewesen wäre?

Wollte Jemand sagen, Cäsar hätte sich doch wohl irren, und den Neumond im ersten Jahr auf einen Samstag supponiren können; wofolglich der Sonntagsbuchstab durch das ganze Jahr B gewesen wäre: so ist dieses nicht wahrscheinlich. Sossigenes, dessen sich Cäsar bediente, seinen neuen Kalender einzurichten, war ein allzuguter Sternkündiger, als daß er den mittlern Vollmond, (der damals, weil die Monds-Anomalie keinen ganzen Grad erreichte, vom wahren Vollmond nicht viel über eine Stunde differirte) um einen ganzen Tag hätte verfehlen sollen.

Es ist also so gut als mathematisch demonstriret, daß das erste Jahr der Julianischen Kalender-Verbesserung wirklich und in der That, keineswegs aber in der bloßen Supposition, vermittelst des Zurückzählens, ein Schaltjahr gewesen.

§. 107.

Gleichwie sich die Sonntagsbuchstaben für ein jedes Jahr, aus demjenigen, welches man vor sich hat, zurück und vorwärts bestimmen lassen; so läßt sich auch auf gleiche Weise das Aequinoctium und der österliche Vollmond für ein jedes Jahr zurück und vorwärts bestimmen. Nur muß man die Vorsicht gebrauchen, daß man zu erst bis auf ein Jahr, womit das o Jahr einer Epoche anfängt, zurück oder vor sich gehe, und von diesem aus hernach das gegebene Jahr berechne.

Zum

Zum Exempel. Man hätte Ao. 1769 observiret, daß das Æquinoctium auf den 20ten März um 7 Uhr 44′ 45″ gefallen wäre; man fraget nun, wann es im Jahr 1718 gefallen? So geht man zu erst auf das Jahr 1600 zurück, welches das 0 Jahr unsers größten Zirkels gewesen, das ist, man zieht 1600 von 1769 ab; so verbleiben 169. Diese mit 128 dividirt geben zum ersten Quotienten 1, und es verbleiben übrig 41. Diese weiter mit 33 dividiret, geben zum zweyten Quotienten 1, und es verbleiben übrig 8. Folglich sind von Ao. 1600 bis 1769 verflossen, 1 großer Zirkel von 128 Jahren, und einer von 33 Jahren, sammt weitern 8 Jahren. Weil nun nach Verfluß des größten Zirkels das Aequinoctium um gar nichts; nach Verfluß eines 33 jährigen um 11′ 15″, und in 8 Jahren um 1 Stunde 30 Minuten zurückgeht; so muß man diese zusammen addiren; thut 1 Stunde 41 Minuten 15 Secunden. Diese addiret man weiters zu der observirten Zeit des Aequinoctii im Jahr 1769; so zeigt die Summa 9 Stunden 26 Minuten Vormittag, wo sich das Aequinoctium den 20ten März im Jahr 1600 begeben hat.

Nun zieht man 1600 von 1718 ab; so verbleiben 118. Diese mit 128 dividiret, ist der erste Quotient 0. Wenn man sie weiters mit 33 dividiret, so geben sie zum zweyten Quotienten 3, und es verbleiben 19 Jahre übrig. Nach 3 größern Zirkeln geht das Aequinoctium um 33 Min. 45 Sec. (§. 87) und in 16 Jahren um 3 Stunden zurück, in 3 gemeinen Jahren aber um 17 Stunden 26 Minuten 15 Secunden vor sich. Man zieht demnach hiervon 3 Stunden 33 Minuten 45 Secunden ab, so verbleiben 13 Stunden 52 Minuten 30 Secunden. Diese thut man zur Zeit des Aequinoctii im Jahr 1600, nämlich zu 9 Uhr 26 Minuten Vormittag; so kömmt man auf 11 Uhr 18 Minuten

30 Secunden nachmittag. Zeit des Aequinoctii im Jahr 1718 am 20ten Märzen.

Eben so wirft es sich haargenau heraus, wenn man nach der ordentlichen Methode (§. 88.) verfährt. Denn der Ueberrest 19 giebt in der Aequinoctialtafel (§. 86.) den 20ten März um 11 Uhr 52 Minuten 15 Secunden nachmittag: hievon abgezogen 11 Minuten 15 Secunden mit dem zweyten Quotienten 3 multipliciret, oder 33 Minuten 45 Secunden, verbleiben zur Zeit des Aequinoctii 11 Uhr 18 Minuten 30 Secunden. (a)

§. 108.

(a) Die Æquinoctia, welche unsere Tabelle giebt, sind nur cyklische und mittlere Æquinoctia in Ansehung des wahren vom Jahr 1600, welches wir zur Epoche angenommen haben. Was wir also oben (§. 29) gesagt haben, daß nämlich unsere Tabelle die Æquinoctia eben so genau anzeiget, als der astronomische Calcul, das versteht sich nur von den Jahren, die nicht weit von an. 1600. entfernet sind. Bey den übrigen vor- und rückwärts differiren sie bald mehr bald weniger; je nach Verschiedenheit der mittlern Anomalie der Sonne, wornach sich die Centergleichungen richten, und die von dem Sonnen-Apogeo abhängt. Diese Differenz hat aber nicht gar viel zu bedeuten: daher finde ich auch die Tabelle unnöthig, die ich schon darüber gemacht hatte. Z. Ex. im Jahr 145. vor der gemeinen Zeitrechnung, fiel das Æquinoctium, nach den Caßinischen Tafeln berechnet, auf den 24ten März um 6. U. 30′ 38″ Nachmittag. Und unsere Æquinoctial-Tafel weiset es auf den 20ten März (weil unser Kalender von dem Julianischen in diesem Jahr um 4 Tage differiret) um 6 U. 37′ 15″. Der Unterschied betragt nur 6′ 37″. Hipparch observirte in diesem Jahr, welches das 602te der nabonassarischen Zeitrechnung ist, den 27ten des Monaths Mecheir, welcher mit dem 24 März julianischen Styls übereintrift, das Æquinoctium gerade am Mittage. Wenn

nun

§. 108.

Eine ganz gleiche Bewandniß hat es mit dem österlichen Vollmond. Gesetzt, man wüßte aus einer Observation oder sonst woher, daß der mittlere Vollmond im Jahr 1769 auf den 22ten März um 1 Uhr 39 Minuten Nachmittag fällt: und man wollte wissen, an was für einem Tage er sich Ao. 1718 ereignet, so geht man wie im vorigen §. auf das Jahr 1600 zurück.

Der erste Quotient 1 giebt in der				
Epacten-Tafel Nro. 1,	4 T.	1 St.	44 M.	27 Sec.
Der zweyte Quotient 1, Nro. 2,	4 T.	12 St.	26 M.	28 Sec.
und der Ueberrest 8, Nro. 3,	28 T.	— St.	2 M.	50 Sec.
Zusammen	36 T.	14 St.	13 M.	45 Sec.
abgezogen eine Revolution	29 T.	12 St.	44 M.	3 Sec.
	7	1	29	42
Diese zu der Zeit des Vollmonds im Jahr 1769 hinzugethan, näml. zu	22	1	39	—
Vollm. Ao 1600 im Märzen den	29 um	3 U.	8 M.	42 Sec.

 Um

nun die Observation vollkommen richtig gewesen wäre; so würden die Caßinischen Tafeln eben so fehlerhaft seyn, als unsere Æquinoctial-Tafel. Es mag aber wohl seyn, daß Hipparch in Bestimmung der Sonnenabweichung um $6\frac{1}{2}$ Minuten gefehlt hat, welches eben soviel Stunden in der Zeit ausmachet. Wir sehen daher nicht, wozu die genaueste Bestimmung des wahren Æquinoctii dienen solle. Eben die Ursachen, warum man sich mit den mittlern Vollmonden anstatt der wahren begnüget, um eine kurze und leichte Kalenderberechnung zu haben, gilt auch bey den Æquinoctien, weil diese eben so wenig als die wahren Vollmonde auf allen Meridianen des Erdkreises sich zugleich ereignen können.

Um nun den österlichen Vollmond fürs Jahr 1718 zu finden, verfährt man wie oben (§. 94). Der erste Quotient ist 0.

Der zweyte 3, giebt Nro. 2,	13 T.	13 St.	19 M.	24 Sec.
Der Ueberrest 19 Nro. 3,	28 T.	20 St.	11 M.	39 Sec.
Zusammen	42 T.	9 St.	31 M.	3 Sec.
abgezogen eine Revolution	29	12	44	3
	12 T.	20 St.	47 M.	— Sec.
Diese von der Zeit des Vollmonds Ao. 1600 abgezogen	29 T.	3 St.	8 M.	42 Sec.
Vollm. Ao. 1718 im Märzen den	16 um	6 U.	21 M.	42 Sec.

Weil aber derselbe nicht österlich ist; so muß man noch eine

Revolution hinzuthun mit	29 T.	12 St.	44 M.	3 Sec.
thut zusammen	45 T.	19 St.	5 M.	45 Sec.
den Märzen abgezogen mit	31 T.	—	—	—
österl. Vollmond im April den	14 um	19 U.	5 M.	45 Sec.

das ist den 15ten April um 7 Uhr 5 Minuten 45 Secunden Vormittag.

Sechster Abschnitt.

Von einer ganz neuen nach unserer Kalenderforme eingerichteten Periode.

§. 109.

Man weis, daß Scaliger eine große Periode erfunden hat, die nach seinem Namen die Julianische Periode genen-

net

net wird. Sie begreift 7980 Jahre, und entsteht aus der Multiplication des Sonnenzirkels zu 28, des Mondszirkels zu 19, und des Indictionzirkels zu 15 Jahren untereinander, und sie sollte zu einem allgemeinen Behältniß oder Receptaculo aller Epochen dienen. Wenn man weis, was ein vorgegebenes Jahr für einen Sonnen- Monds- und Indictions- Cyclum hat; so kann man daraus das Jahr der Julianischen Periode bestimmen, welches mit dem gegebenen übereintrift. So hat man herausgebracht, daß das erste Jahr der Æræ vulgaris, welches das 10te im Sonnenzirkel, das 2te im Mondszirkel, und das 4te im Indictionszirkel gewesen, das 4714te der Julianischen Periode war.

So richtig und zuverläßig nun die Sonntagsbuchstaben, und die Jahre der Indiction, für die gegebenen Jahre der Julianischen Periode, sich durch die Division mit 28 und 15 bestimmen lassen; so wenig kann man die wahre Zeit des mittlern Vollmonds durch die Division mit 19 finden: weil dieser Mondszirkel in 312 Jahren um einen ganzen Tag fehlet.

§. 110.

Ich wage es, hier eine ganz andere Periode vorzuschlagen, die, wie ich dafür halte, der Julianischen weit vorzuziehen ist; weil sie 1) auf weit einfachern Gründen beruht. 2) Weil die mittlern Voll- und Neumonde darinnen bis auf etliche Minuten auch für die entferntesten Jahre bestimmet werden können. Und 3), weil alle bisher bekannte Epochen innerhalb dieser Periode fallen, wohingegen einige außer der Julianischen Periode zurück hinaus gehen. Unsere Periode geht auch viel weiter Vorwärts, als die Julianische, ja, wenn man will, unendlich weit.

§. 111.

Wir nehmen dazu 1) einen Zeitraum von 1000 combinirten Zirkeln zu 128000 Jahren. Wir lassen 2) vor dem Jahr 1600 ganze 56 Zirkel vorausgehen; diese thun 7168 Jahre. Wenn man 1600 davon abzieht, verbleibt das Jahr 5568, welches mit dem 0 Jahre der gemeinen Zeitrechnung übereintrift; folglich ist das erste der gemeinen Zeitrechnung dem 5569ten unserer Periode gleich.

§. 112.

Wenn man also wissen will, was ein jedes Jahr der gemeinen Zeitrechnung für ein Jahr unserer Periode sey? so thut man die Differenz der Jahre, (nämlich vom gegebenen und 1600) zu 56 ganzen Zirkeln, oder 7168 Jahren, wenn das gegebne Jahr nach 1600 fällt; oder man zieht die Differenz davon ab, wenn es vorhergeht. (a) Man fragt z. E. was das Jahr 1769 für ein Jahr unserer Periode sey? so thut man die Differenz 169 zu 7168. Die Summe macht 7337; das ist das Jahr unserer Periode, welches dem 1769sten der Æræ vulgaris gleich ist.

Das Jahr 522 vor der Æra vulgari differiret von 1600 um 2122 diese von 7168 abgezogen, verbleiben 5046, welches das mit dem 522ten Jahr vor der Æra vulgari gleiche Jahr unserer Periode anzeigt.

§. 113.

(a) Es versteht sich von selbst, daß, wenn ein Jahr vor dem 0 Jahr der Æræ vulgaris gegeben wird, man solches zu 1600 addiren müsse. Jedermann sieht hieraus, wieviel leichter es ist, die gegebenen Jahre auf unsre Periode zu reduciren, als auf die Julianische, bey welcher es einen mühsamen Calcul braucht.

§. 113.

Man darf demnach nur den Unterschied andrer Epochen von der gemeinen Zeitrechnung Christi, oder der Æra vulgari, dazuthun oder davon abziehen, so bekömmt man das Jahr einer jeden Epoche in unsrer Periode. Damit erlangen wir folgende Epochen-Tafel.

1) Das erste Jahr der gemeinen Zeitrechnung ist gleich dem Jahr unserer Periode . . . 5569
Es fängt an mit dem ersten Jan. Julianischen Styls, welcher dem 30 Decemb, unsers 5568ten Jahrs gleich ist.

2) Der Constantinopolitanischen Epoche, oder der neuern Griechen von Erschaffung der Welt . . 60
Es fängt an den 1ten September Julianischen Styls, und nach dem unsrigen den 18ten July.

3) Der ältern Geschichtschreiber oder des Julii Africani 68

4) Der Alexandrinischen oder des Panodori . 75
Es fängt an den 29ten August Julianischen Styls, und nach dem unsrigen den 14ten July.

5) Der Julianischen Periode . . 856
Es fängt an den 1ten Jänner Julianischen Styls, und nach dem unsrigen den 22ten November Ao. 855.

6) Des Eusebii von Erschaffung der Welt . 1341
Es fängt an beym Herbst Æquinoctio.

7) Der Juden von Erschaffung der Welt. . . 1808
Es fängt an den 7 Octob. Julianischen Styls, und nach dem unsrigen den 5ten Septemb. Auf diesen Tag fällt wirklich der Neumond. Und weil der 5te Septemb. den Buchstaben C hat, unser Sonntagsbuchstab aber B ist, so war dieser Tag ein Montag oder Fer. 2.

8) Der Olympischen Spiele . . 4793
Es fängt an den nächsten Neumond um das Sommer Solstitium.

9) Von Erbauung der Stadt Rom nach Varro 4816
Nach den Fastis Capitolinis . . 4817
Es fängt an den 21ten April Julianischen Styls, nach dem unsrigen aber den 13ten April.

10) Des Nabonassars . . . 4822
Es fängt an den 26ten Febr. Julianischen Styls, nach dem unsrigen aber den 18ten Febr.

11) Der Julianischen Kalenderverbesserung . 5524
Es fängt an mit dem ersten Jänner Julianischen Styls, nach dem unsrigen aber den 29ten Decemb. 5523. Auf diesen Tag fällt der Neumond, und er war ein Freytag.

12) Der Spanischen Æræ . . . 5531
Es fängt an den ersten Jänner nach Julianischem Styl, nach dem unsrigen aber den 29ten Decemb. 5530

13) Der Æræ Actiacæ . . . 5539
Es fängt an den 29ten August Julianischen Styls, nach dem unsrigen aber den 26ten August.

14) Der Æræ Diocletianæ oder Martyrum 5852
Es fängt an den 29ten August Julianischen Styls; und nach dem unsrigen den nämlichen Tag.

15) Der Hidschret, (Hegira) oder der Türkischen Zeitrechnung 6190
Es fängt an den 16ten July Julianischen Styls, nach dem unsrigen aber den 18ten July.

16) Des Yezdegerds, oder der Persischen Æræ. 6200
Es fängt an den 16ten Juny Julianischen Styls, nach dem unsrigen aber den 19ten Juny.

Wir

Wir haben die Epochen nach dem Freyherrn von **Wolf** angesetzet. Ein andersmal werden wir zeigen, worinnen es hier und da fehlet, und wie alle Epochen aufs rechte herzustellen seyn.

§. 114.

Wenn man wissen will, was das gegebene Jahr einer Epoche für ein Jahr unsrer Periode sey; so zieht man vorher 1 davon ab, und addiret es hernach zu dem Jahr unserer Periode, das der Epoche zukömmt. Man fragt z. E. was das 225te Jahr der Nabonassarischen Zeitrechnung für ein Jahr in unserer Periode sey: so addiret man 224 zu 4822, thut 5046. Dieß ist das Jahr unserer Periode, so dem 225ten Nabonassarischen gleich ist.

§. 115.

In 128 Jahren unsers Kalenders werden 31 Tage eingeschaltet (§. 81.); im Julianischen aber 32: folglich geht unser Sonntagsbuchstab nach Verfluß eines combinirten Zirkels gegen dem Julianischen um 1 Vorwärts. Wenn wir nun setzen, daß unser Kalender von dem Julianischen im 0 Jahr der Periode um 46 Tage differiret habe, (a) so muß nothwendig folgen, daß sie im Jahr 5888 unserer Periode, welches das letzte im 46sten Zirkel, und das 320ste der gemeinen Zeitrechnung ist,

(a) Um so viel mußten sie differiren: denn vom 0 Jahr unsrer Periode bis auf das 1600te der gemeinen Zeitrechnung, sind nach unserm Kalendersysteme 56 Tage weniger eingeschaltet worden, als nach dem Julianischen: folglich hätte unser Kalender im 0 Jahr der Periode um so viel Tage weniger zählen müssen, als der Julianische, wenn beyde im Jahr 1600. gleich gewesen wären. Da aber im Jahr

ist, um o differiren müssen. Wenn man demnach den Unterschied der Tage unsers Kalenders, und des Julianischen, für ein jedes vorgegebenes Jahr der Periode wissen will; so zieht man den ersten Quotienten der Division, welcher die Anzahl der, vom o Jahr unserer Periode an gerechnet, verflossenen Zirkel andeutet, von 46 ab; alsdann zeiget der Ueberrest die Differenz der Tage in beyden Kalendern. Ist der erste Quotient größer als 46: so zieht man diese davon ab.

§. 116.

Es trägt sich aber zuweilen zu, daß auch innerhalb des combinirten Zirkels beyde Kalender um einen Tag mehr oder weniger differiren, als die im vorgehenden §. 115. gefundene Differenz ausmacht.

§. 117.

Um nun die wahre Differenz auf das genaueste zu finden; muß man auf 3. Fälle acht haben.

1. Fall.

Wenn das vorgegebene Jahr nach beyden Stylis ein Schaltjahr ist: da bleibt die Differenz, wie sie sich §. 115. ergiebt.

2 Fall.

Jahr 1600. unser Kalender um 10 Tage mehr zählet, als der Julianische (§. 103.); so folgt nothwendig, daß er im o Jahr der Periode um 10 Tage weniger als 56 das ist 46 Tage Unterschied zählen mußte. Wenn man das Jahr Christi 320. nach der oben (§. 69.) gegebenen Regel berechnet; so findet man die julianischen Sonntagsbuchstaben C B, und eben diese ergeben sich auch, wenn man das 5888te Jahr unserer Periode, welches das nämliche Jahr ist, nach unsrer Methode berechnet.

2. Fall.

Wenn das vorgegebene Jahr entweder in einem oder andern Stylo ein Schaltjahr ist. 1) Ist es ein unsriges; so ist die Differenz vor dem Schalttage um 1 kleiner, hernach aber gleich. 2) Ist es ein Julianisches Schaltjahr, so bleibt die Differenz vor dem Schalttag; sie wird aber hernach um 1 kleiner.

3. Fall.

Wenn das vorgegebene Jahr nach beyden Stylis ein gemeines Jahr ist. So sieht man, was für ein Schaltjahr zu nächst vorhergeht. 1) Ist es ein unsriges; so bleibt die Differenz. 2) Ist es aber ein Julianisches; so wird sie um 1 kleiner. 3) Sind beyde Schaltjahre gleich weit davon entfernet, so bleibt die Differenz wie sie §. 115. gefunden worden. Dieß alles gilt vor dem Jahr 5888. Hernach aber wird die Differenz um 1 größer in den Fällen, wo sie vorher um 1 kleiner war.

§. 118.

Wir wollen die gegebenen Regeln durch Exempel erläutern.

Vom ersten Fall.

Das Jahr 6016. ist sowohl im Julianischen Kalender ein Schaltjahr (weil es nach der Division mit 4 nichts übrig läßt) als nach dem Unsrigen, (weil es das letzte Jahr des 47ten Zirkels ist) Der erste Quotient ist 47. Hievon 46 abgezogen, bleibt 1. Also differiren beyde Kalender in diesem Jahr um 1 Tag.

Vom zweyten Fall.

Nro. 1. Das 4822te Jahr unserer Periode ist nach unserm Stylo ein Schaltjahr; denn es ist das 20te im 3ten 33 jährigen Zirkel. Nach dem Julianischen Stylo aber ist es kein Schaltjahr. Der erste Quotient ist 37: dieser von 46 abgezogen verbleiben zur Differenz (§. 115.) 9. Vor dem Schalttage ist also die Differenz 8, nach dem Schalttage aber 9.

Nro. 2. Das Jahr 4816. ist im Julianischen Styl ein Schaltjahr, nach dem unsrigen aber ein gemeines: denn es ist das 14te im ersten 33 jährigen Zirkel. Der erste Quotient ist 37; diesen von 46 abgezogen (§. 115.) verbleiben 9. Vor dem Schalttage bleibt sie; aber hernach ist sie 8.

Vom dritten Falle.

Nro. 1. Das Jahr Christi 1770 (oder 7338 unserer Periode) ist ein gemeines Jahr sowohl nach unserm als dem Julianischen Styl. Das nächst vorhergehende 7337te Jahr war ein unsriges Schaltjahr (nämlich das 8te im 2ten 33jährigen Zirkel) Das nächst vorhergehende 7336te julianische Schaltjahr hingegen ist um 2 Jahre davon entfernet. Der erste Quotient ist 57; Hiervon 46 abgezogen verbleiben 11 zur Differenz der Tage, ohne etwas dazu oder davon zu thun.

Nro. 2. Das Jahr 4817 ist ein gemeines Jahr nach beyden Stylis. Es ist das 15te im dritten 33jährigen Zirkel. Der erste Quotient ist 37; diesen von 46 abgezogen, verbleiben 9 zur Differenz der Tage in beyden Kalendern. Das nächst vorhergehende Schaltjahr war ein Julianisches (denn das unsrige geht 3 Jahre vorher). Die Differenz wird also um 1 kleiner, nämlich 8 Tage.

Nro. 3.

Nro. 3. Das Jahr 7302 unserer Periode (oder das 1734te der gemeinen Zeitrechnung) ist sowohl nach unserm als dem Julianischen Styl ein gemeines Jahr. Der erste Quotient ist 57. Hiervon 46 abgezogen, verbleiben 11 zur Differenz der Tage. Unser nächst vorhergehendes Schaltjahr (nämlich das 7300te unserer Periode, oder das 1732te der gemeinen Zeitrechnung) ist um 2 Jahre davon entfernet, eben so wie das Julianische nächstvorhergehende. Die vermög (§. 115.) gefundene Differenz der Tage 11 gilt also für dieses Jahr.

§. 119.

Vor dem Jahr 5888 unserer Periode (oder dem 320sten der gemeinen Zeitrechnung) addiret man die Differenz zu dem gegebenen Tage unsers Styls: nach selbigem Jahre aber zieht man sie davon ab, um den nämlichen Tag im Julianischen Kalender zu haben. Gerade umgekehrt verfährt man, wenn der Tag im Julianischen Styl gegeben wird, den man auf den unsrigen reduciren will.

§. 120.

Solchergestalt lassen sich auch die Sonntagsbuchstaben des Julianischen Kalender aus den unsrigen finden: wenn man vor dem Jahr 5888 unserer Periode von unserm Buchstaben soviel vorwärts, und nach demselben soviel rückwärts zählet, als die gefundene Differenz der Tage (7 so oft davon weggeworfen, als sichs thun läßt) ausmachet.

§. 121.

Wollte man lieber unabhängig von diesen Regeln den Sonntagsbuchstaben für den Julianischen Kalender finden, so

 verfährt

verfährt man wie oben (§. 69.). Das ist man zieht vom gegebenen Jahre so oft 700 ab, als sichs thun läßt. Den Ueberreß dividiret man mit 4, und thut den Quotienten hinzu. Von dieser Summa zieht man 4 ab, (a) anstatt der 2, die man nach besagter Regel (§. 69.) abziehen sollte. Die verbleibende Zahl dividiret man mit 7, so zeigt der Ueberreſt nach der Division um wieviel man von A zurückzählen müsse, um den Julianischen Sonntagsbuchstaben zu haben, der für das gegebene Jahr gilt.

Man fragt z. E. was das Jahr 5046 unserer Periode für einen Sonntagsbuchstaben im Julianischen Kalender habe? so zieht man 700 siebenmal, das ist 4900 davon ab verbleiben . . . . . 146; diese mit 4 dividiret
ist der Quotient . . . 36

Zusammen 182
davon abgezogen. 4

Verbleiben 178 Diese mit 7 dividiret
bleiben übrig 3 Rückwärts E.

Folglich ist der Julianische Sonntagsbuchstab in diesem Jahr E,

§. 122.

Wenn man den Sonntagsbuchstaben im Gregorianischen Kalender-System für ein gegebenes Jahr unserer Periode finden will; so muß man Acht haben, ob es vor oder nach dem Jahr 5568 welches

(a) Denn der Julianische Sonntagsbuchstab im 0 Jahr unserer Periode war E: weil unser Kalender A hatte, und 46 Tage, oder 6 Wochen 4 Tage weniger zählte als der Julianische (§. 115). Man muß also von E zurückzählen. Wenn man nicht von E, sondern von A zurückzählen will; so muß man vorher von der Summa 4 abziehen.

(welches mit dem o Jahr der Æ. v. übereintrift,) fällt. Geht es vorher, so zieht man es 1) von 5568 ab: 2) den Ueberrest dividiret man mit 400: und was 3) nach der Division übrig verbleibt, das zieht man von 400 ab: mit diesem neuen Ueberrest verfährt man durchgehends wie oben (§. 68).

Man wollte z. E. wissen, was das Jahr 5046 unserer Periode für einen Sonntagsbuchstaben im Gregorianischen Kalender habe: so zieht man es von 5568 ab: verbleiben 522. Diese mit 400 dividiret bleiben übrig 122. Und diese weiters von 400 abgezogen geben zum Ueberrest 2 7 8 Diese mit 4 dividiret geben zum Quotienten 6 9

Zusammen 3 4 7 Hiervon abgezogen die erste Ziffer des Rests . 2

Verbleiben 3 4 5 Diese mit 7 dividiret bleiben übrig . . 2 rückw. Also ist der Gregorianische Sonntagsbuchstab in diesem Jahr F. Wenn aber das gegebene Jahr größer ist als 5568; so zieht man diese davon ab, und verfährt mit dem Ueberrest durchgehends wie oben (§. 68.) Es sey z. E. das Jahr unserer Periode 8 1 9 2 Hiervon abgezogen . . 5 5 6 8

Verbleiben 2 6 2 4 Davon weggeworfen 6mal 400 oder . . 2 4 0 0

Ueberrest 2 2 4 Diese mit 4 dividiret geben zum Quotienten . 5 6

Zusammen 2 8 0 Hiervon die erste Ziffer des Ueberrests abgezogen mit 2

Verbleiben 2 7 8 diese mit 7 dividiret bleiben übrig . . . 5 rückw. Also ist der Gregorianische Sonntagsbuchstab in diesem Jahr C.

§. 123.

§. 123.

Nehmen wir das 225te Jahr der Nabonassarischen Zeitrechnung. Dieses ist das 5046ste Jahr unserer Periode. Nun verfährt man durchaus wie §. 87.

```
              5 0 4 6 ⎫ 3 9  Erster Quotient
       128)   3 8 4   ⎭
      ---------------------
              1 2 0 6
              1 1 5 2
      ---------------------
       3 3)     5 4 ⎫ 1  Zweyter Quotient
                3 3 ⎭
      ---------------------
 Ueberrest      2 1
 darunter Schaltjahr 5
      ---------------------
                2 6 R.
 der Erste Quotient doppelt   7 8
 der zweyte Quotient            1
                          ----------
                              7 9  V.
                              2 6  R.
                          ----------
                              5 3
 7 siebenmal weggeworfen oder 4 9
                          ----------
       Verbleiben               4  Vorwärts E.
```

Also ist unser Sonntagsbuchstab E. Der erste Quotient 39 von 46 abgezogen giebt 7 Tage Unterschied.

§. 124.

Das vorgegebene Jahr ist ein gemeines Jahr, sowohl nach dem unsrigen Stylo als nach dem Julianischen. Das unserige Schaltjahr 20 im 2ten 33jährigen Zirkel geht unmittelbar, das Julianische 5044te aber 2 Jahre vorher. Also sind wir im 3ten Fall Nro. 1 (§. 117.); folglich bleibt die Differenz 7. Der Tag dem-

demnach, der in unserm Kalender der 9te July heißt, ist im Julianischen der 16te July Unser Kalender hat den Sonntagsbuchstaben wie der Julianische E. (§. 121.).

§. 125.

Dieses Jahr ist merkwürdig, weil sich darinnen, wie **Ptolomäus** im 5ten Buch seines Almagests im 14 Cap. erzählet, den 17ten des Monats **Phamenoth** eine Mondsfinsterniß zu Babylon ereignet hat. Also fiel der Vollmond auf diesen Tag.

Jetzt wollen wir sehen, was für ein Tag des Julianischen Kalenders mit dem 17ten des Monats **Phamenoth** in diesem Jahr übereintrift.

Man weis, daß der Anfang des 1ten Nabonassarischen Jahrs auf den 26ten Febr. im Jahr 746 vor der Æra vulgari (wenn man das Erste dieser letztern 0 seyn läßt, wie wir beständig thun) gefallen ist. Zwischen dem 26ten Febr. und 1ten Jänner sind 56 Tage Unterschied. Man weis ferner, daß ein Nabonassarisches Jahr, wie das andere, aus 12 Monaten, jeden zu 30 Tagen gerechnet, und 5 zugeworfenen Tagen (ἡμέραις ἐπαγομέναις) das ist, aus 365 Tagen besteht: folglich geht der Anfang desselben in 4 Jahren um einen Tag im Julianischen Kalender zurück; dieß thut in 225 Jahren 56 Tage. Da nun ebengesagter maßen zwischen dem 26ten Febr. und 1ten Jänner just 56 Tage verfließen; so fällt der Anfang des 225ten Nabonassarischen Jahrs auf den 1ten Jänner des 522sten Jahrs vor der Æ. vulgari. Der Monat **Phamenoth** ist der 7te im Nabonassarischen Jahr; folglich sind vom Anfange des Jahrs bis dahin 180 Tage verflossen. Thun wir noch 16 Tage dazu, bis auf den 17ten **Phamenoth**

menoth

menoth; so macht die Summa 196 Tage, welche vom 1ten Jänner bis auf den 17ten dieß Monats verflossen. Nun haben

der Jänner, Febr. und März 90 Tage.
April, May, Juny — 91 —
der July . . 31

Zusammen 212 Tage.
Davon abgezogen . . 196

Verbleibt der 16te July.

Dieser war, wie wir oben bewiesen haben, der 9te July unsers Kalenders. Nun wollen wir sehen, ob unsre Berechnung auch den Vollmond auf diesen Tag herauswirft. Vor allem aber müssen wir die Epoche des österlichen mittlern Vollmonds für das 0 Jahr unserer Periode bestimmen.

Ao. 1600 fiel derselbe auf den 29ten Märzen um 3 Uhr 9 M. (§. 43.) Von diesem Jahr bis auf das 0 Jahr unserer Periode sind 56 ganze Zirkel verflossen: 50 Zirkel geben in der Epacten

Tafel Nro. 1, . . 26 T. 10 St. 38 M. 17 Sec.
und 6 Zirkel . . 24 T. 10 St. 27 M. 43 Sec.

Zusammen 50 T. 21 St. 6 M. — Sec.

um soviel ist der österliche mittlere Vollmond in 56 combinirten Zirkeln (rückwärts gezählet) vor sich gegangen. Thun wir also

dazu obige . . . 29 T. 3 St. 9 M.

so haben wir . . 80 T. — 15 M.
2 Revol. davon abgezogen mit 59 T. 1 St. 28 M. (§. 44.)

Verbleiben 20 T. 22 St. 47 M.

Demnach begiebt sich der mittlere österliche Vollmond im 0 Jahr

unserer

unserer Periode den 20ten März, um 22 Uhr 47 Minuten. Dieß ist also wiederum eine neue Epoche.

Nun ist unser obiger erster Quotient (§. 123.) 39. Dieser giebt in der Epacten-Tafel Nro. 1, (30 † 9)

	11 T. 4 St. 13 M. 22 Sec.
Der zweyte Quotient 1, Nro. 2,	4 T. 12 St. 26 M. 28 Sec.
der Ueberrest 21, Nro. 3,	21 T. 13 St. 50 M. 20 Sec.
Zusammen	37 T. 6 St. 30 M. 10 Sec.
abgezogen eine Revolution	29 T. 12 St. 44 M. 3 Sec.
Verbleiben	7 T. 17 St. 46 M. 7 Sec.
Diese abgezogen von der Epoche nämlich von . .	20 22 47 —
Vollmond im März den	13 um 5 U. 8 M. 53 Sec.
dazu 4 Revolutionen mit	118 T. 2 St. 56 M. — Sec.
thut	131 T. 7 St. 55 M. 53 Sec.
Den März, April, May und Juny abgezogen mit	122 T. — St. — M. —
Verbleiben . . .	9 T. 7 St. 55 M. 53 Sec.

Also fällt der Vollmond dieses Jahr den 9ten July um 7 Uhr 55 Minuten 53 Secunden. Und im Julianischen Kalender den 16ten July um 7 Uhr 55 Minuten 53 Secunden. Dieß ist eine neue Probe von der Richtigkeit unsers Systems.

§. 126.

Daß selbiges allenthalben einschlage, auch nach den Jahren der gemeinen Zeitrechnung, werden folgende Exempel zeigen.

Nehmen wir zuerst das Jahr 1769 so haben wir folgenden Calcul.
Das Jahr unserer Periode nämlich das 0 Jahr vor der Æra vulgari 5 5 6 8
Das gegebene Jahr 1 7 6 9

128) 7 3 3 7 ⎫ 5 7 Erster Quotient
6 4 0 ⎭

9 3 7
8 9 6

33) 4 1 ⎫ 1 zweyter Quotient
3 3 ⎭

Ueberrest 8 ein Schaltjahr
darunter sind 2 Schaltjahre

1 0 R.

der erste Quotient zweymal 1 1 4
dazu den zweyter Quotienten 1

1 1 5 V.
1 0 R.

1 0 5 V.
7 fünfzehenmal weggeworfen 1 0 5

Verbleibt 0 A.

Also sind die Sonntagsbuchstaben in diesem Jahr nach unserm Kalender B A, und im Julianischen D. (§. 117.)

Der erste Quotient ist 57. Davon abgezogen 46 verbleiben 11 Tage zur Differenz der Tage. Wir sind im 2ten Fall

Fall Nro. 1 (§. 117.) folglich differiren beyde Kalender vor dem Schalttage um 12, und hernach um 11 Tage.

§. 127.

Der erste Quotient ist 57, dieser giebt in der Epactentafel

Nro. 1, nämlich 50	26 T. 10 St. 38 M. 17 Sec.
7	28 T. 12 St. 12 M. 10 Sec.
Der zweyte Quot. 1 Nro. 2	4 T. 12 St. 26 M. 28 Sec.
Der Ueberrest 8 Nro. 3;	28 T. — St. 2 M. 50 Sec.
abgezogen von der Epoche mit	87 T. 11 St. 19 M. 45 Sec.
3 Revolut. vermehret, das ist, von	109 T. 12 St 59 M. 9 Sec.
Verbleiben	22 T. 1 St. 39 M. 24 Sec.

Dieß ist der Tag im Märzen, wo sich der mittlere Vollmond Ao. 1769 ereignet, genau wie hieroben (§. 94.).

§. 128.

Versuchen wir es auch mit den Jahren 325 und 387 der gemeinen Zeitrechnung

```
                 5 5 6 8
                   3 2 5
                 -------
                 5 8 9 3 ] 46 Erster Quotient
            128) 5 1 2   ]
                 -------
                   7 7 3
                   7 6 8
                 -------
                       5
darunter ist           1 Schaltjahr
                 -------
                       6 R.
Der erste Quotient doppelt   92
der zweyte Quotient           0
                 -------
                     9 2 V.
                       6 R.
                 -------
                     8 6
mit 7 dividiret verbleiben   2 V. C, eben so wie
im Julianischen.
```

Eee 3

Weil

Weil der erste Quotient 46 ist; so ist die Differenz der Tage 0. Wir sind im 3ten Fall Nro. 3 (§. 117.) weil beyde nächstvorhergehende Schaltjahre gleich weit entfernet sind. Also bleibt die Differenz 0.

§. 129.

Der erste Quotient 46 giebt in der Epacten-Tafel				
Nro. 1, nämlich 40	15 T.	5 St.	57 M.	49 Sec.
und 6, ...	24 St	10 M.	27 M.	43 Sec.
Der zweyte Quotient 0,	0	0	0	0
Der Ueberrrest 5 Nro. 3,	24 T.	15 St.	12 M.	47 Sec.
Zusammen	64 T.	7 St.	38 M.	19 Sec.
abgezogen 2 Revolutionen mit	59 T.	1 St.	28 M.	6 Sec.
Verbleiben	5 T.	6 St.	10 M.	13 Sec.
Diese abgezogen von der Epoche nämlich von . .	20 T.	22 St.	47 M.	— Sec.
Verbleibt der Tag des Vollm. im Märzen den . . .	15 um	16 U.	36 M.	47 Sec.

Dieser war aber nicht österlich; folglich muß man noch eine

Revolution hinzuthun mit	29 T.	12 St.	44 M.	3 Sec.
thut zusammen	45 T.	5 St.	20 M.	50 Sec.
den Märzen abgezogen mit	31 T.	—	—	—
Verbleiben	14 T.	5 St.	20 M.	50 Sec.
Also ereignete sich Ao. 325 der österl. Vollmond im April den	14 um	5 U.	20 M.	50 Sec.

wie hieroben (§. 99.).

§. 130.

§. 130.

Nun folgt auch der Calcul für das Jahr

```
                387
               5568
         ----------
  128)         5955 ⎫ 46 Erster Quotient
               512  ⎭
         ----------
                835
                768
         ----------
   33)           67 ⎫ 2 Zweyter Quotient.
                 66 ⎭
         ----------
```

Ueberreſt	1	R.
Der doppelte erſte Quotient iſt	92	
der zweyte Quotient	2	
	94	W.
Der Ueberreſt	1	R.
	93	W. dieſe mit 7 dividiret
bleiben übrig	2	W. C eben ſo, wie im Julianiſchen.

Weil der erſte Quotient 46 iſt; ſo iſt die Differenz der Tage 0. Wir ſind im 3ten Fall Nro. 1 (§. 117.) weil ein unſeriges Schaltjahr unmittelbar, das Julianiſche aber 3 Jahre vorhergeht: folglich bleibt die Differenz der Tage 0. Beyde Kalender haben demnach den nämlichen Sonntagsbuchſtaben C.

Der erſte Quotient 46 giebt in der Epactentafel Nro. 1

nämlich 40 . . .	15 T.	5 St.	57 M.	49 Sec.
Und 6, .	24 T.	10 St.	27 M.	43 Sec.
Der zweyte Quot. 2, giebt Nro. 2,	9 T.	— St.	52 M.	56 Sec.
Und der Ueberreſt 1 R. 3,	10 T.	15 St.	11 M.	22 Sec.

Sum=

Summa	59 T.	8 St	29 M.	50 Sec.
Hiervon abgez. 2 Revolut. mit	59 T.	1 St.	28 M.	6 Sec.
Verbleiben	0 T.	7 St.	1 M.	44 Sec.
Diese von der Epoche abgezogen nämlich von . . .	20 T.	22 St.	47 M.	— Sec.
Verbleibt der Tag des Vollmonds im Märzen den . .	20ten um	15 U.	45 M.	16. Sec.

Wie hieroben (§. 99.).

§. 131.

Damit man auch die übrigen Lunationen durch alle Monate für ein jedes Jahr unserer Periode geschwind finden möge: so fügen wir hier eine Epochentafel für das 0 Jahr unserer Periode bey.

Neu- und Vollmond Epochen-Tafel für das 5568te Jahr vor der gemeinen Zeitrechnung.

Monat	Neumond			mit einer Revolution vermehrt			Vollmond			mit einer Revolution vermehrt		
	T.	St	M	T.	St	M	T.	St	M	T.	St	M
Ianuar.	7	2	57	36	15	41	21	21	19	51	10	3
Februar,	5	15	41	35	4	25	20	10	3	49	22	47
Mart,	6	4	25	35	17	9	20	22	47	50	11	31
April	4	17	9	34	5	53	19	11	31	49	—	15
May	4	5	53	33	18	37	19	—	15	48	12	59
Iunii	2	18	37	32	7	21	17	12	59	47	1	43
Iulii	2	7	21	31	19	45	17	1	43	46	14	27
Item	31	20	5	—	—	—	—	—	—	—	—	—
August	30	8	49	—	—	—	15	14	27	45	3	11
Septemb.	28	21	33	58	10	17	14	3	11	43	15	55
Octob.	28	10	17	57	23	1	13	15	55	43	4	39
Novemb.	26	23	1	56	11	45	12	4	39	41	17	23
Decemb.	26	11	45	56	—	29	11	17	23	41	6	7

Man

Man fraget z. E. an welchem Tage, Stunde ꝛc. der Neumond im Märzen Anno 387, welches wir im vorhergehenden 130 §. berechnet haben, gefallen ist?

Die Summa der Epacten, nachdem man 2 Revolutionen abgezogen, thut 0 Tag, 7 Stunden, 1 Minuten, 44 Sec. Nun suchet man in der Epochentafel den Neumond im Märzen; da findet man den 6ten 4 Stund. 25 Minuten: hiervon 7 St. 1 Minuten 44 Secunden abgezogen, verbleibt der gesuchte Neumond im Märzen Anno 387 den 5ten, 21 Stunden, 23 Minuten 16 Secunden.

§. 132.

Diese letzte Art, alle gegebene Jahre einer jeden Æræ (auch der gemeinen Zeitrechnung) auf unsere Periode zu reduciren, und hiernach die Berechnung anzustellen, wollte ich allen obigen vorziehen. Man operiret immer auf eine gleichförmige Art. Sie hat auch noch den Vortheil, daß sie durch die bloße Division mit 15, ohne etwas hinzu = oder davon zuthun, die Jahre der Indiction zeiget, eben so, wie die Julianische. (a). Ich werde

 in

(a) Die Division mit 19 zeiget auch im Ueberreſt die goldene Zahl, oder das laufende Jahr im Julianischen Mondszirkel, eben, so wie in der Julianischen Periode. Wenn aber die Division mit 28 im Ueberreſt den Julianischen Sonnenzirkel weisen soll; so muß man von dem vorgegebenen Jahr unserer Periode vorher 15 abziehen: denn das Jahr 5568 oder das 0 Jahr der Æræ vulgaris mit 28 dividiret, bleiben übrig 24, dieß Jahr war aber das 9te im Sonnenzirkel. Hingegen zeiget die Division mit 4 die Julianischen Schaltjahre, welches in der Julianischen Periode nicht angeht. Und noch einen weit größern Vortheil hat unsre Periode vor der Julianischen, weil man für ein jedes gegebenes Jahr das

in einer eigenen Abhandlung die Verknüpfung unserer Periode mit andern Epochen ausführlicher zeigen, womit (geliebts GOtt) die Zeitrechnung eine ganz andere genauere und zuverläßigere Bestimmung erhalten wird, als sie bisher gehabt hat.

§. 133.

---

das Frühlings Æquinoctium aus der Aequinoctial-Tafel ganz geschwind bestimmet, welches in der Julianischen Periode ohne astronomischen Calcul nicht geschehen kann: folglich thut unsere Periode in der Kirchen- und Profan-Historie weit bessere Dienste als die Julianische.

Und was nutzet die Division mit 19 und 28? Denn diese geschieht nur darum, daß die Sonntagsbuchstaben und die Neu- oder Vollmonde dadurch gefunden werden. Unsere Methode zeiget die Sonntagsbuchstaben eben so richtig und zuverläßig an, und zwar ohne eine Sonnenzirkel-Tabelle dazu nöthig zu haben, die man bey der Julianischen Methode nicht entbehren kann. Und was die mittlern Neu- und Vollmonde anbelanget; so zeiget unsere Epacten-Tafel dieselben ganz genau bis auf Stunden und Minuten auch für die entferntesten Zeiten an. Die goldene Zahl aber verfehlet sie desto mehr, je weiter die Jahre von Ao. 532 der Æræ vulgaris vor und rückwärts entfernet sind.

Nehmen wir zum Exempel das 3168ste Jahr vor der gemeinen Zeitrechnung, welches das 2400te unserer Periode ist. In diesem Jahr haben wir den Sonntagsbuchstaben B, und im Julianischen Kalender B A. Unsere Epacten-Berechnung bringt den Vollmond auf den 26ten März um 1 Uhr 9 Minuten. Und weil unser Kalender von dem Julianischen in diesem Jahr nach dem Schalttage um 27 Tage differiret, um welche der Julianische mehr zählet als der unsrige; so fällt eben dieser Vollmond im Julianischen Kalender auf den 22ten April, um 1 Uhr 9 Minuten. Nimmt man nun die goldene Zahl 6, die diesem Jahr zukömmt, und geht damit in die Mondszirkel-Tabelle; so zeigt sie den Vollmond auf den 10ten April, folglich um 12 Tage früher an, als er sich wirklich ereignete.

§. 133.

Ich habe mich in meinem Vortrage der äußersten Deutlichkeit beflissen, und meine Sätze mit so vielen Exempeln (vielleicht bis zum Eckel) erläutert, daß mich ein Jeder, der weder von der Astronomie noch Chronologie die geringste Känntniß besitzet, sondern nur die 5 Species der gemeinen Rechnungskunst inne hat, leicht verstehen kann. Hätte ich blos für Gelehrte schreiben wollen, so würde ich viel weniger Worte gebraucht haben, um mich verständlich auszudrücken. Da ich aber um nichts mehr beeyfert bin, als die Wissenschaften soviel möglich allgemein zu machen, und nicht Gelehrten allein, sondern auch dem gemeinen Mann zu dienen; so habe ich mich auch nach eines jeden Begriffe richten müssen. Ich widerhole noch einmal, was ich im Eingange gesaget habe; daß ich nämlich keine neue Wahrheiten entdecket, sondern nur bekannte und zwar sehr gemeine Wahrheiten auf eine neue Art angewendet habe.



Nachschrift.

Wir haben oben in der Note (a) zum 107ten §. gesaget, daß unsre mittlern Æquinoctia von den wahren um gar wenig differiren, in den Jahren, die nicht weit von Anno 1600. entfernet sind. Das ist auch wahr. Wenn sie aber sehr weit, zum Exempel 7000 Jahre vor und rückwärts davon abstehen; so lauft die Differenz bis auf 2 Tage hinaus. Wir werden daher demnächstens eine sehr einfache Tabelle mittheilen, welche diese Differenz für alle Zirkel von 0. bis 112. enthält; vermöge deren man mit Beybehaltung unsrer Aequinoctial-Tafel, die wahren Frühlings-Aequinoctia für ein jedes Jahr unsrer Periode bis auf etliche Minuten nahe, ohne astronomischen Calcul, bestimmen kann.



Be=

Beschreibung

der

von Herrn

Georg Friedrich Brander

Mitgliede der churbaierischen Akademie der Wissenschaften, und berühmten Mechanico in Augspurg

neuerfundenen

Glasmicrometer.

Von

Herrn Professor Lambert

zu Berlin.





§. 1.

Die Micrometer haben seit ihrer ersten Erfindung nicht nur alle Aufmerksamkeit verdienet, sondern auch nach und nach mehrere Verbesserungen und Abänderungen erhalten. Ich werde mich mit der Erzählung derselben nicht aufhalten, sondern sogleich auf diejenige kommen, von welchen hier eigentlich die Rede seyn wird. Hr. Mayr, der sich durch mehrere sinnreiche Erfindungen, und besonders durch seine Mondstafeln einen bleibenden Ruhm erworben, und dem bey längern Lebensjahren die Sternkunde und die Naturlehre noch manche Bereicherung würde zu verdanken gehabt haben, ist, so viel mir bekannt, der erste, der auf den Einfall kam, ein Micrometer in Form einer Meßleiter auf Glase zu zeichnen, und dasselbe in den Brennpunkt der Fernröhre zu setzen. Er beschrieb das ganze Verfahren in den Nachrichten und Sammlungen der cosmographischen Gesellschaft auf das Jahr 1748, und zeigte die beträchtlichen Vorzüge solcher Micrometer bey astronomischen Beobachtungen. Es wird den letztern nicht unangenehm seyn, die mayersche Abhandhandlung an ihrem besondern Ort zu lesen. Sie werden

den auf diese Art die Geschichte der Erfindung beysammen haben und mir fällt die Mühe weg, sie hier im Auszuge vorzustellen, wiewohl das, was Mayer von seinem Micrometer rühmt, allemal verdient, nochmals gerühmt zu werden. Er hatte sich desselben bedient, die Lage jeder einzelnen Sterne, der Plejaden, verschiedene Bedeckungen derselben und anderer Sterne von dem Monde zu beobachten; besonders aber fand er sich dadurch in Stand gesetzt, die Lage jeder Mondsflecken, die von Hevel und Riccioli sehr unzuverläßig bestimmt worden, nach ihrer geographischen, oder selenographischen Länge und Breite genau zu bestimmen, und eine Charte vom Monde zu entwerfen, die durchaus zuverläßig ist. Es ist nur zu bedauren, daß diese Charte auf der göttingischen Sternwarte liegen bleibt, ohne durch einen saubern und genauen Abdruck gemeinnützlich gemacht zu werden. Denn dieses ist meines Wissens noch nicht geschehen. Es wäre doch den Engländern ein geringes, noch etwann 100 tt. St. darauf zu setzen.

§. 2. Man wird aus der mayerischen Abhandlung sehen, daß derselbe auf den Gedanken verfiel, vermittelst eines Diamanten oder Feuersteins die Scale auf Glas einzuschneiden. Was ihn aber davon abhielt, war die Besorgniß, die Linien möchten nicht rein, noch fein genug ausfallen, und besonders möchte das Glaß beym Einschneiden seitwärts ausspritzen. Die Schwürigkeit dieses zu vermeiden ist allerdings beträchtlich, und um desto mehr ist es zu bewundern, daß Hr. Brander, der sich dabey Zeit und Geduld nicht reuen lassen, die Geschicklichkeit darinn so weit getrieben, als man es immer verlangen kann. Ich habe von seinen Glasscalen einige verschiedenen Personen vorgewiesen, die sie so fein fanden, daß sie sie kaum oder gar nicht se-

sehen konnten. In der That sind auch die Linien darauf kaum $\frac{1}{300}$ Theil einer Duodecimallinie des Pariser Zolles breit. Wegen eben dieser Feinheit findet sich auch Hr. Brander im Stande, eine Linie des Pariserzolles in 10 und allenfalls in noch mehrere Theile zu theilen.

§. 3. Zu diesem Vortheile kommen noch zween andere, die das mayerische Micrometer, welches mit der Feder und mit Tusche gezeichnet ist, nicht hat. Das mayerische darf man kaum anrühren, und wenn Staub darauf fällt, so braucht es, um ihn wegzubringen, viele Behutsamkeit, damit die Zeichnung nicht ausgelöscht werde. Dieses hat man bey dem branderischen Micrometer nicht zu besorgen. Sodann gebraucht Mayer, da seine Theile selten gleich groß werden, einer besondern Berichtigungstafel, die mit vieler Mühe muß verfertiget werden. Dieses wird bey den branderischen Micrometern ganz unnöthig. Die Theile sind darauf so gleich, daß die Gleichheit nicht nur so gleich in die Augen fällt, sondern auch die schärfsten Proben aushält. Ueberdieß kann Hr. Brander denselben jede beliebige Größe geben.

§ 4. Diese branderischen Micrometer sind nach der Verschiedenheit des Gebrauches von verschiedener Art. Bey Microscopien werden dieselben in Quadrate getheilt. Und so habe ich eines, das 6 Linien Parisermaaß lang, und 6 Linien breit ist. Es ist aber jede Linie in 10 Theile, und daher jede Quadratlinie in 100 kleinere Quadrate, und damit das ganze Micrometer in 3600 kleine Quadrate wirklich eingetheilet. Dieses giebt für einen Quadratzoll 14400 kleine Quadrate, die mit bloßem Auge noch sehr wohl zu sehen sind; und wenn das Glas in das Microscopium gelegt wird, wo das Bild hinfällt, so lassen sich

diese kleine Quadrate in solcher Größe sehen, daß, wenn ich mir die Geschicklichkeit, die Mayer von sich rühmt, zutraue, es noch wohl möglich ist, einen Raum, der einer Linie groß zu seyn scheint, sowohl der Länge als der Breite nach in 60ten Theilen zu schätzen weis. Die vorbemelten 14400 Quadrate müssen mit 3600 multiplicirt werden, um die Anzahl der Punkte zu erhalten, die auf dem Micrometer durch das Ocularglas betrachtet in dem Raume eines Quadratzolles noch kenntlich sind. Die Rechnung giebt 518400, das ist über eine halbe Million solcher Punkte.

§. 5. Lege ich aber ein solches Quadrat, wovon 14400 einen Quadratzoll machen, unter das Microscop als ein Object, so ich durch das Microscop sehen will, und setze erstbemeldte Scale, die in eben solche Quadrate getheilt ist, als ein Micrometer in das Microscop, so kommen noch ungleich größere Zahlen heraus, die, nachdem ich ein anders Objectivgläßgen ansetze, verschieden sind. Ich habe fünf solcher Objectivgläsgen, und um desto mehr damit die Probe gemacht, weil ich auf diese Art ohne Mühe finden konnte, wie stark bey jedem die Vergrößerung ist. Ich durfte nämlich nur sehen, wie viel $\frac{1}{10}$ Linien, die unterlegte $\frac{1}{10}$ Linie auf dem Micrometer bedeckt. Und so fand ich für das Objectivgläsgen

N. 1. . . $2\frac{1}{3}$.
2. . . $4\frac{1}{3}$.
3. . . 6.
4. . . $8\frac{3}{4}$.
5. . . $18\frac{3}{4}$.

§. 6. Diese Zahlen müssen quadirt werden, um zu finden, wie viele Quadrate des Micrometers das Bild des untergelegten

legten Quadrates bedecket, und so findet sich für

N. 1. . . $4\frac{5}{9}$.
2. . . $18\frac{7}{9}$.
3. . . 36.
4. . . $76\frac{9}{16}$.
5. . . $351\frac{9}{16}$.

§ 7. Mit diesen Zahlen werden nun die vorhingefundenen 518400 multiplicirt, um die Anzahl der Puncte zu finden, die vermittelst des Microscopii bey jedem der 5 Objectivgläser auf einem Quadratzoll des Objectes noch sehr gut kenntlich sind. Die Rechnung giebt für

N. 1. . . 2,361600.
2. . . 9,734400.
3. . . 18,662400.
4. . . 39,690000.
5. . . 182,2500.0.

§. 8. Die (§. 5.) gefundenen Zahlen thun noch den Dienst, daß vermittelst derselben die Größe der untergelegten Objecte in Theilen einer Pariserlinie sehr genau ausgemessen werden können. Ich gebrauchte gewöhnlich das Objectiv N. 3, welches die Theile des Objects auf dem Micrometer 6mal größer vorstellt. Damit legte ich Fliegenaugen unter, und fand, daß 9 derselben, die in einer Reihe lagen, auf dem Micrometer einen Raum von $\frac{13}{10}$ Linien bedeckten. Dieser Raum durch 6 getheilt, giebt $\frac{13}{60}$ Linien für die Länge im Object selbst. Wird nun ferner $\frac{13}{60}$ Linien durch 9, als die Zahl der Augen getheilt, so giebt der Quotient $\frac{13}{540}$ Linien für den Diameter eines Auges, oder $\frac{2}{83}$ einer Linie. Ich habe mich dieser Art bedienet, um die innern Dia-

 meter

meter von Thermometerröhren zu messen. Ich schliffe sie gerade ab, und stellte sie aufrecht, so daß die Oefnung gegen das Objectivgläsgen gekehret war.

§. 9. Auf eine ähnliche Art stellte ich Proben über die Schärfe des Gesichtes an. Ich legte von den Fäden unter das Microscop, die im Frühling die ausschlagende Weidenblüthe umhüllen. Der Diameter davon bedeckte auf dem Micrometer nur $\frac{1}{40}$ Linie, und demnach war er selbst nur $\frac{1}{240}$ Linie. Nun konnte ich in der Entfernung von 8 Zollen, oder 96 Linien einen solchen Faden einzeln mit bloßem Auge noch gut und deutlich sehen, sowohl, wenn ich ihn gegen den freyen Himmel als gegen ein dunkles Object hielte. Sehe ich nun die 96 Linien als einen Halbmesser an, so sind die $\frac{1}{240}$ Linien der 23040te Theil des Halbmessers, demnach =0,0000434. Dieses ist nun ein Winkel von 9 Secunden eines Grades, den ich demnach mit bloßem Auge unterscheiden konnte. Man sieht aus dem vorhergehenden §, daß der Diameter eines Fliegenauges fast 6mal größer war, und dennoch konnte ich es mit bloßem Auge nicht unterscheiden. Der Grund liegt schlechthin darinn, daß ich es nicht einzeln sahe, denn zur Seite war ein viel feineres Fäserchen, welches ich mit bloßem Auge noch gar wohl, obgleich nicht ganz deutlich sehen konnte. Hingegen mit einem Augenglase von 16 Linien Brennweite sahe ich die Augen einzeln, und wie sie in Reyhen lagen. Da nun ein solches Glaß 6mal vergrößert, so ist es eben so viel, als wenn ich die Augen unter einem 6mal größern Winkel, demnach unter einem Winkel von 54 Secunden eines Grades gesehen hätte. Es wird aber dieser Winkel auf 40 Secunden, oder auf 36 herunter gesetzt, weil der weiße Zirkel in jedem Auge um so viel kleiner ist als die Fäserchen, womit jedes Aug eingefaßt ist, aus-

tragen. Denn zum deutlichen Sehen wird erfordert, daß diese Fäserchen von dem weissen Zirkel unterschieden werden. Man sieht demnach hieraus, was es bey der Schärfe des Sehens auf sich hat, wenn ein Object allein oder mit andern Objecten zugleich gesehen wird, und daß es in der practischen Geometrie allemal genauer geht, wenn die Zeichen, so man aussteckt, auf schwarzem Grunde einen weißen Strich, oder auf weißem Grunde einen schwarzen Strich haben. Ein Aug, das gut in die Ferne sieht, wird solche Striche, und besonders den weißen in solcher Entfernung sehen können, wo die scheinbare Breite nur noch einen Winkel von 9 Secunden beträgt, und demnach der Abstand 23000mal größer ist, als die Breite des Striches. Dieses beträgt für die Breite eines Zolles ungefehr 2000 Fuß. Gebraucht man aber ein Fernrohr, daß 30mal vergrößert, so wird der Strich bis auf 3 Meilen gesehen werden können. Es versteht sich aber, daß das Aug und das Fernrohr gut, das Zeichen aber behörig erleuchtet seyn muß.

§. 10. Die Micrometer für Fernröhre sind von doppelter Art. Hr. Brander macht sie ebenfalls von Glas. Die eine Art dient schlechthin nur statt der bisher gebräuchlich gewesenen Kreuzfäden. Diese Kreuzfäden, so fein sie auch sind, haben immer noch einen vielfach größern Diameter, als die Linien breit sind, die H. Brander auf dem Glase zieht. Man setze z. E. die Brennweite des Objectivglases sey von 3 Fuß, oder 4320 Decimaltheilen von Linien. Da nun $\frac{1}{4320}$ =0,0002323 ist, so giebt ein $\frac{1}{10}$ Linie einen Winkel von 48 Secunden. Nun müssen solche Fäden schon sehr fein seyn, wann sie nicht dicker, als $\frac{1}{30}$ Linien seyn sollen. Sind sie aber so dünne, so bedecken sie auf dem Campo Micrometri einen Winkel von 16 Secunden. Und wenn sie

auch nach Hr. de la Lande Ausmessung nur $\frac{1}{50}$ Linien sind, so bedecken sie dennoch einen Winkel von 10 Secunden. Die Linien, so wie Hr. Brander sie auf Glas zieht, sind nur $\frac{1}{200}$ Linien breit, und so bedenken sie auch nur einen Winkel von $2\frac{1}{2}$ Secunden, wenn der Tubus nur 3 Fuß lang ist. Ist er aber von $7\frac{1}{2}$ Fuß, so bedenken sie vollends nur 1 Secunden.

§. 11. Außer dieser Feinheit der Linien habe ich an demjenigen Micrometer, so Hr. Brander nebst einem Tubo von 23. Fuß für die K. Akademie zu Berlin verfertigt, noch den Durchschnitt dreyer solcher Linien bemerkt. Diese drey Linien durchschneiden sich dergestalt in einem Punct, daß dieser Punct selbst durch ein Ocularglas betrachtet, nichts ausgesprungenes zeigt, und damit auch nicht breiter als jede der drey Linien ist, die auf dem Glase gezogen sich in dem Punct durchschneiden. Wenn ich diesen Umstand auch nur unter die glücklich gerathenen rechne, so zeigt er doch immer theils die Möglichkeit der Sache, woran Mayer zweifelte, theils die Geschicklichkeit, diese Möglichkeit wenigstens einmal erreicht zu haben, und die Vermuthung, daß sie sich noch mehrmal werde erreichen lassen.

§. 12. Die andere Art von Micrometern, so Hr. Brander für Fernröhre ausfertigt, sind ordentliche Scalen, die in Minuten oder halbe oder viertel Minuten oder auch in Linien, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$ Linien eines Zolles, oder in jede beliebige Theile getheilt sind. Hr. Brander hatte solche Scalen auch für kurze Fernröhre, die gar nicht vergrößern, aber ein desto größers Feld haben sollten, verfertigt, und unter dem Titel von Polymetroscopium bereits 1764. eine Beschreibung davon herausgegeben, um den Gebrauch davon in mehrerley Fällen, als nützlich und angenehm zu zeigen.

Der

Der Hauptvortheil zeigte sich indessen immer bey Fernröhren und Telescopien, wo man vornehmlich gute Micrometer zu haben verlangt. Selbst in der praceischen Geometrie thun sie vortrefliche Dienste, weil auch da nicht selten Winkel vorkommen, die eben deßwegen, weil sie nicht groß sind, um desto genauer gemessen werden müssen; zumal wo man aus der scheinbaren Größe eines Objectes, dessen Größe bekannt ist, auf dessen Abstand schliessen will. Von solchen Fällen habe ich bereits in den **Beyträgen zur Mathematick** verschiedene angeführt, und würde mich noch umständlicher dabey aufgehalten haben, wenn mir diese Micrometer so bekannt gewesen wären, wie sie mir nachher der Augenschein gezeigt hat. Da ich aber erst nachgehends einen einfachen Tubum von 3 Fuß mit solchen Micrometern von Hrn. Brander erhielte, und sowohl die Feinheit als die Genauigkeit der Micrometer mein Erwarten weit übertraf; so sahe ich auch, daß es sich der Mühe lohnte, auf die davon zu erwartenden Vortheilen zu denken.

§. 13. So viel sahe ich gleich, daß ich von meinem Fenster aus einen Soldaten, der in einer Entfernung von 500 bis 600 Fuß Schildwache stund, bis auf $\frac{1}{4}$ Zoll und noch genauer messen konnte, da mir die Entfernung aus dem Grundriße der Stadt bekannt war, Den Durchmesser des Mondes in einer gewissen Höhe fand ich bis auf 2 oder 3 Secunden, so wie ihn die Mayerischen Tafeln angaben. Um aber den Tubum für irrdische Objecte bequem zu machen, so sahe ich, daß da die Röhre für nahe Objecte mehr ausgezogen werden muß, das beste seyn würde, wenn ich bey jedem Ausziehen oder Verlängern der Röhre vermittelst einer auf der Röhre gezeichneten Scala sogleich sehen könnte, wie viele Theile des Micrometers das Objectum jedes-

mal von dem Micrometer entfernt ist. Diese Entfernung für unendlich weit entlegene Gegenstände fand sich von 550 größern oder 2750 kleinern Theilen des Micrometers. Ich bezeichnete demnach den Punkt auf der in der andern eingeschobenen Röhre, da wo diese anfieng jene zu bedecken, und je, nachdem ich die vordere Röhre von 10 zu 10 Theilen mehr auszog, zeichnete ich ebenfalls solche Puncte, und schrieb die Zahlen 550, 560, 570 ꝛc. der Ordnung nach hin, und theilte die Zwischenräume in 10 gleiche Theile. Dieses setzte ich fort, so weit sich die Röhre ausziehen ließ, und damit wurde der Gebrauch des Tubus für irrdische Gegenstände sehr erleichtert. Denn für jedes nahe gelegene Object zog ich die äußerste Röhre so weit aus, bis sich das Object durch den Tubum gesehen deutlich zeigte. Auf dem Micrometer sahe ich wie viele Theile das Objectiv von der Scala bedeckte, und auf der Röhre konnte ich ebenfalls sehen, wie viele Theile das Objectiv von dem Micrometer entfernt war. Diese letztere Zahl verhält sich nun immer zur erstern, wie die Di[illegible]s Objectes zu seiner Größe. Und so ließe sich durch eine blo[illegible] Regel Detri aus der Distanz die Größe des Objects, oder hinwiederum aus dieser jene finden.

§ 14. So z. E. auf einem Wasserthurme, der beyläufig 2420 Pariserfuß von meinem Fenster entlegen war, sahe ich eine Statue, so einen Neptun vorstellt. Ich wollte die Größe der Statue finden. Da diese Entfernung merklich groß ist, so ließ ich dem Tubo die Länge von den 550 Theilen, ohne ihn mehr auszuziehen. Auch zeigte sich das Bild deutlich, und bedeckte auf dem Micrometer 2,46 Theile. Ich schloß demnach

$$550 : 2420 = 2{,}46 : 10{,}8$$

Und so fand sich die Höhe der Statue von 10 $\frac{4}{5}$ Fuß.

§ 15.

§. 15. Hinwiederum von einem gegen meinem Fenster über liegenden Dache wollte ich den Abstand des Gibels finden. Ich richtete das Fernrohr gegen die unmittelbar vom Giebel abwärts hangenden Ziegel, so daß die Scala des Micrometers Horizontal zu liegen kam. Den Tubum müßte ich bis auf 572 Theile ausziehen, um die Ziegel deutlich zu sehen; damit fand sich, daß die Breite von zween Ziegeln genau 7 Theile des Micrometers bedeckte. Da mir nun bekannt war, daß auf jede Ziegelbreite $\frac{1}{2}$ rhein. Fuß gerechnet werden kann, so machte die Breite von zween Ziegeln 1 rhein. Fuß. Damit ließ sich nun nach der Regel Detri

$$7 : 572 = 1 : 81\frac{5}{7}$$

schließen, daß diese Ziegel $81\frac{5}{7}$ rhein. Fuß, und daher der Giebel 82 rhein. Fuß von dem Objectivglase des Tubus entfernet seyn mußten. Aehnliche Versuche giengen noch sehr genau bis auf die Entfernung von 700 Fuß an. Denn das Micrometer war in 14 größere, oder 70 kleinere Theile getheilt, und jeder kleinere Theil ließ sich nach einer bloßen Schäzung des Augenmaaßes sehr leicht noch in 10 kleinere Theile theilen, so daß, wenn ich so viele Ziegel zusammen nahm, als die Scale des Micrometers fassen konnte, auf 700 nicht um 1 verfehlt wurde. Daran fehlte es also nicht. Die Hauptfrage war aber wohl diese: ob man immer sicher genug auf jede Ziegelbreite genau $\frac{1}{2}$ rhein. Fuß rechnen könne. Denn, wo dieses nicht ist, da wird zwar eben nicht viel fehlen, indessen ist alsdann die darauf gegründete Rechnung nur beyläufig. Uebrigens laßen sich bey Fensterscheiben, zumal wo sie rund und auf den Glashütten, gerundet sind, ähnliche Versuche anstellen. Denn, wenn auch solche Ausmessungen nur beyläufig sind, so dienen sie doch theils zur Cu-

riosität, theils weil man ohnehin nicht immer die äußerste Schärfe verlangt.

§ 16. Will man aber hiebey genau verfahren, und z. E. Distanzen von 300, 400, und mehr Fußen auf eine sehr kurze Art ausmessen, so ist wohl das sicherste, daß man Latten oder Stangen, durch kenntliche Zeichen, in einzelne Fuß eintheile, und sie in der verlangten Entfernung gerade aufrichten lasse; so läßt sich, wenn man den Tubum gegen dieselben richtet, und ihn behörig auszieht, auf dem Micrometer sehen, wie viel Fuß dasselbe beynahe, oder genau ganz bedecken. Und damit kann die Entfernung ebenfalls vermittelst einer Regel Detri sehr genau gefunden werden. Uebrigens müßen die Stangen desto länger seyn, je größer die Entfernung ist. Denn hiebey ist die Hauptsache, daß man auf dem Micrometer so viele Theile brauche, als immer möglich ist. So z. E. muß bey meinem Tube für jede 40 Fuß größere Entfernung die Stange um 1 Fuß länger genommen werden: Weil die 14 Theile des Micrometers in den 550 Theilen, so die kürzeste Länge des Tubus ausmachen, ungefehr 40mal enthalten sind. Man kann daher, wenn die Stange gar zu lang genommen werden müßte, statt derselben zwey Zeichen in zureichender Entfernung von einander ausstecken, und die Scale des Micrometers Horizontal legen. Solche Zeichen müßen aber von dem Tubo gleichweit entfernt seyn, damit sie in Form einer Chorde eines Winkels gemessen werden können.

§. 17. Man kann auch 3 Zeichen ausstecken, die unter sich einen gleichseitigen Triangel bilden, dessen Seiten aber sehr genau bestimmt und bekannt seyn müssen. Auch muß man solche drey Zeichen entweder alle, oder wenigstens zwey und zwey durch

das

das Fernrohr zugleich sehen können. Man sieht sodann wie viele Theile diese Zeichen auf dem Micrometer abschneiden. Es sey z. E. (Fig. 1.) ein solcher Triangel ABC, der mit dem Fernrohr aus D gesehen wird. Da nun der Winkel ADC selten größer als 1 Gr. ist, so kann man AE, EC nach den auf dem Micrometer gefundenen Theilen proportioniren, und die Linie BE ziehen. Zieht man sodann CF auf BEF senkrecht, so hat man den rechtwinklichten Triangel DFC, in welchem CF bekannt ist, und folglich FD, vermittelst der Theile des Micrometers, so die Puncte CB abschneiden, und der Länge des Tubus gefunden werden kann. Addirt man FB zu FD, so erhält man die ganze Länge DB. Da man hiebey den Triangel ABC immer so nehmen kann, daß die eine Seite AB mit D in gerader Linie liegt; so kann man auch immer erhalten, daß E in A, und F mitten auf AB fällt, und damit wird alles noch kürzer und zuverläßiger. Man kann sich auch (Fig. 2.) ein Gestelle machen, wovon die 2te Figur das Profil vorstellt. A, B, C zeigt nämlich die rhombische Figur der aufrecht zu stellenden Stangen, und AB, AC, BC sind Latten, die in A und C eingesteckt, und durch B und C so durchgezogen werden können, daß man dem Triangel A B C die nach Verhältniß der Entfernung erforderliche Größe geben kann. Zu diesem Ende werden die Latten von A gegen B und C, und von C gegen B in Fuße und Zolle eingetheilt. Die Stangen ABC sind oben gegen die Mitte zugespitzt, oder sonst so bezeichnet, daß deren Mittelpunct durch den Tubum kenntlich und scharf gesehen werden könne; denn dieses muß sehr genau seyn, und die Stangen A B C müßen von der verticalen Stellung wenigstens nicht merklich abweichen, dabey aber genau parallel seyn. Setzt man ein solches Gestell mitten auf ein auszumessendes Feld, und man geht an den Ecken desselben herum, so läßt

es sich, vermittelst des Tubus in Grund legen, und zwar noch ziemlich genau, wenn auch das Feld schon einige 100 Fuß lang und breit ist.

§. 18. Jedoch dieß sind alles micrometrische Kleinigkeiten, die aber allemal ihre eigene Wichtigkeit haben. Indessen hatte ich die Vermuthung, daß sich von solchen Scalen noch ungleich beträchtlichere Vortheile sollen können ziehen lassen. Kurz, es war die Frage auch Winkel von vielen Graden mit solchen Scalen zu messen, und zwar mit eben der Schärfe, mit welcher die gewöhnlichen Fernröhre nur einen Grad oder auch nur wenige Minuten messen. Dieses letztere erfordert eine starke Vergrösserung, ersteres aber ein desto größeres Feld vom Micrometer. Beyde diese Vortheile aber stehen einander dergestalt im Wege, daß sie nicht leicht zugleich erhalten werden können, zumal wo man bey einer 20 bis 30 maligen Vergrößerung dennoch ein Feld von 20 biß 30 Graden erhalten will. Indessen ließen sich Mittel finden. Denn daß die Schuld nicht an dem Objectivglase liege, zumal wo dessen Bedeckung nicht sehr groß ist, das zeigte die Camera obscura, welche auf beyden Seiten der Axe des Glases wenigstens bis auf 15 Grade die Bilder noch immer sehr deutlich vorstellt. Bilder von so viel Graden brachte Hr. Brander auch auf das Mikrometer von seinem Polymetroscopio, und konnte sie ganz und deutlich sehen, weil das Augenglas dabey eben die Größe hatte. Aber eben dadurch fiel die Vergrösserung ganz weg, und bey schärfern Augengläsern wurde von dem Bilde weniger zu sehen gewesen seyn. Das erste Mittel, so sich demnach darboth, war, daß das Augenglas in immer gleicher Entfernung auf dem Mikrometer hin und her geschoben werden konnte, und dabey ließen sich allenfalls auch zwey Augenglä-

ser anbringen, so daß solche Theile des Bildes, die durch das eine nicht zugleich sichtbar waren, durch beyde besonders gesehen werden konnten. Es sey in der 3ten Figur BC das Object, O das Objectivglas, AOa dessen Axe, cb das Micrometer von Glas in seine Theile getheilt, so fallen die Bilder der Punkte BAC in bac. Rückt man demnach das eine Augenglas in M, das andere in N, so wird man durch M den Punkt oder die Theile des Objects bey C, durch N aber die Theile des Objects bey B sehen. Und in cb zeigt es sich, welche Theile des Micrometers von dem Bilde der Punkte C B bedecket werden, und wie groß folglich der Winkel cOb = COB ist, wenn man c b als eine Chorde, und Oc, Ob als einen Halbmesser betrachtet. Auf diese Art erhält der Tubus die Figur einer flachen Pyramide, da er in O nur wenig größer, als das Objectivglas, dagegen aber in MN so breit seyn muß, als es wegen der Deutlichkeit des Bildes immer angehen kann. Denn man sieht leicht, daß je schiefer die Strahlen sind, man desto ehender ein undeutliches und gefärbtes Bild zu besorgen hat.

§ 19. Das sicherste war, die Sache auf Versuche ankommen zu lassen. Ich schriebe sie an Hr. Brander im Sommer 1768, und da derselbe damals beschäftigt war, einige große astronomische Instrumente vollends zu Ende zu bringen, so stellte er Anfang nur beyläufig eine Probe an, die aber die Vermuthung eines erwünschten Erbfolges genugsam bestärkte. Das Micrometer sollte in c sich herumdrehen laßen, damit so groß oder klein auch die Winkel COB seyn möchten, die mittlere Linie AOa immer so viel als möglich, oder auch genau senkrecht auf das Micrometer treffen könne. Sodann sollte für irrdische Gegenstände das Objectivglas O an einer beweglichen Röhre seyn, die sich

nach Verhältniß der Nähe des Objectes ausziehen lassen konnte. Die Hauptfrage hiebey war aber immer, die Sprache des Micrometers ob für jede Verlängerung der Röhre auf eine leichte Art verständlich zu machen. Denn für unendlich entfernte, oder sehr entlegene Gegenstände war eine ganz einfache Tabelle hinreichend. Diese Tabelle wurde unmittelbar die jedem Theile des Micrometers entsprechenden Winkel angegeben haben. Hingegen würde jede Verlängerung der Röhre entweder eine besondere Tabelle erfordert haben, oder man hätte allemal den Winkel besonders haben berechnen müßen. Indessen hätte sich doch, wenn für einige angenommene Verlängerungen Tabellen berechnet, oder auch durch Versuche verfertigt gewesen wären, alles übrige durch eine leichte Einschaltung finden lassen.

§. 20. Inzwischen dachte ich auf Mittel, die hiebey vorkommenden schiefen Einfallswinkel wegzuschaffen. Ich sahe leicht, daß diese nur daher rührten, weil das Objectivglas eine unveränderliche Lage hatte. Es müßte demnach eben so, wie die Oculargläser gedreht werden, und dieses verwandelte die ersterwähnte Pyramidalfigur wiederum in einen Tubum, und wenn alles mitgenommen werden soll, in zween. Der eine Tubus, dessen Objectiv m, das Ocular M ist, hat eine fixe Lage, und dient das Instrument gegen den Punkt des Objectes B zu richten. Der Tubus liegt auf einer Regel, welche in C ein Centrum hat, um welches sich auch die Regel dreht, auf welcher der andere Tubus liegt, dessen Objectiv n, das Ocular N ist. Das Micrometer hat in B ein Gewind, und geht durch den focum des andern Rohres durch. Es ist so getheilt, daß man durch das Ocular N sogleich sehen kann, wie viele Theile der Winkel ACB auf dem Micrometer faßt. Da die Figur das Instrument nur durch

bloße

bloße Linien vorstellet und verschiedene Leser villeicht Mühe haben sich die ganze Ausbildung desselben und die Art damit umzugehen, vorzustellen: so war es mir ein Vergnügen von Hr. Brander zu vernehmen, daß derselbe den Sector, so wie er ihn ein für allemal zu verfertigen und einzutheilen gesonnen ist, genau abzeichnen, und die Art damit umzugehen, auch solchen faßlich machen will, die sich in neue Instrumente nicht gleich finden können. Ich habe demnach, um auch noch diese Beylage beyfügen zu können, den Druck des Werkes so weit verziehen lassen, damit die Leser in allem befriediget werden können.

§ 21. Diesen Anschlag gab ich Hr. Brander nur überhaupt an. Und da er mit den vorhin erwähnten Instrumenten fertig war, so leuchtete ihm hier alles dergestalt ein, daß er ohne Säumniß an die wirkliche Verfertigung dachte. Er nahm das centrum C außerhalb dem Objectiv, und zwar mit gutem Vorbedacht. Denn, da es hier eigentlich auf die Axen AnaN, BmbM ankommt, so ist es an sich gleichviel, in welchem Punkt, diese Axen sich durchschneiden. Sodann erhielt er eben dadurch auch, daß die beyden Röhren nach Verhältniß der Nähe des Objectes verlängert werden könnten. Und da hiebey immer Cb = Ca ist, so ist auch immer ba eine Chorde von einem beständig gleichen Radius. Dieser Vortheil findet bey einfachen Fernröhren nicht statt. Auch ist hiebey die vollkommen gleiche Länge beyder Fernröhre, die wegen der Umstände beym Glasschleifen nicht leicht zu erhalten ist, nicht nothwendig, und so können auch beyde Fernröhre allenfalls merklich kürzer seyn als der Radius Cb = Ca Hr. Brander nimmt ferner diesen Radius von 5000 oder 50000 Theilen des Micrometers. Dadurch wird der Vortheil erhalten, daß man die auf ba für zwey Objecte BA gefundene Anzahl der

Theile nur schlechthin in den Sinus Tafeln aufsuchen und den dabey stehenden Winkel verdoppeln darf, um den Winkel BCA zu erhalten. Denn überhaupt ist der Sinus eines jeden Winkels die halbe Chorde des doppelten Winkels. Nun wird die Chorde ba schon eben dadurch halbirt, daß der Radius Ca = Cb von 50000 Theilen genommen wird, da er in den Tafeln = 100000 ist. So z. E. wenn ba von 21360 solcher Theile gefunden wird, deren nemlich Cb = Ca 100000 hat, so findet sichs in den Tafeln, daß 21360 sehr genau der Sinus von 12° 20′, demnach die halbe Chorde von 2mal 12° 20′, oder die Chorde von 24° 40 ist. und so groß ist in solchem Fall der Winkel ABC = bCa, den man ausmessen wollte. Am kürzesten kommt man fort, wenn man eine Tabelle vor sich hat, welche für jeden Winkel von zehen zu zehen Secunden die Chorden oder Theile des Mikrometers giebt. Und da Hr. Brander allemal den Radius zu 5000 Theilen oder bey kleinern Sectoren halb so groß nimmt, so kann für alle solche Instrumente eine und eben die Tabelle dienen. Es wird daher denen, die sich dieses Instrument zum wirklichen Gebrauche anschaffen, angenehm seyn, eine solche von ihm berechnete Tabelle in der besonders in Druck zu legenden Beschreibung noch beygefügt zu finden.

§ 22. Ein solcher Sector, der ganz füglich bis auf 30 und mehr Grade geht, und den wir als einen dioptrischen Sector ansehen können, hat nun etwas vorzügliches. Er vereiniget, und zwar auf die geschwindiste Art, die sich gedenken läßt, mehrere Vortheile, die man bey andern Sectoren, theils nicht zugleich erreichen konnte, theils durch viel zusammengesetztere Einrichtungen erhalten mußte. Er zeigt zwar nicht unmittelbar Grade, Minuten, Secunden an, dagegen aber ist man von der genauen und durchaus gleichen Eintheilung des Micrometers ruhig versichert.

Und um dieses nicht bloß zu glauben, so fügt Hr. Brander noch eine kürzere Scala von gleicher Eintheilung bey, die man auf dem Micrometer hin und her schieben, und sich mittelst einer Linse von 1 Zoll Brennweite von der Feinheit der Linien und von der Genauigkeit durch das Selbstsehen überzeugen kann. Die Reduction auf Grade, Minuten, Secunden kann nicht einfacher seyn, als sie hiebey ist (§. 21) bey andern Sectoren muß man erst das Object durch das Fernrohr, und sodann erst auf dem Limbus sehen, wie viele Grade, Minuten rc. es giebt. Hier aber ist das Micrometer selbst der Limbus, und so malet sich das Object unmittelbar auf dem Limbus selbst ab. Zu geometrischen Ausmessungen läßt sich ein solcher Sector, auch wenn Cb = Ca = 41'' 8''', oder 5000 Decimaltheile von Linien eines Pariserzolles ist, ohne von der Genauigkeit etwas zu verlieren, von Holz, und damit so leichte machen, daß er auf dem Felde ohne Mühe hin und her getragen werden kann. Und wenn er da mit einemmale auch nur Winkel von 30 Graden mißt, so ist es weder schwer noch langwirig, zwischen den Objecten, so man abmeßen will, wenn sie über 30 Grad von einander weg liegen sollten, noch andere anzunehmen, die mit den Objecten, oder unter sich geringere Winkel machen. Die Genauigkeit, die man bey dem Sector erhält, ersetzt alles dieses auf eine befriedigende und öfters schätzbare Art. Was ich vorhin bey Anlaß der bloßen Fernröhre sagte, läßt sich hier mit behöriger Vergrößerung der Umstände und mehrerer Entfernung der Zeichen auf Felder ausdehnen, die Meilenwegs ins Gevierte liegen, denn man sieht aus dem vorhin (§ 22) angeführten Beyspiele, daß das Micrometer 20000 bis 30000 Theile faßt, die alle noch kenntlich sind. Wo man aber auf 20000 bis 30000 kaum um 1 fehlen kann, da beträgt mit behöriger Auswahl der Umstände, der Fehler auf eine ganze deut=

sche Meile keinen Fuß. Es setzt aber dieses allerdings einige Uebung und Geschicklichkeit voraus, und dieses muß ich denen sagen, die sich etwann einbilden, daß wenn sie nur gute Instrumente haben, sie sodann ganz obenhin damit verfahren können. Der Erfolg ist aber nicht selten so, daß man mit einer bloßen Meßkette und einigen Stangen genauer würde zum Zwecke kommen können. Es sind berühmte Beyspiele vorhanden, wo man bey **Grahamnischen** Instrumenten in Absicht auf ihre Güte für einzelne Secunden gut stehen wollte, oder sie wenigstens so weit rühmte, und in der Ausübung zeigten sich Fehler, die schon auf 500 eins austrugen, so daß jede Meile um 40 Fuß zu groß, oder zu klein herauskam.

§ 23. Ob sich ein solcher Sector auch in der Astronomie gebrauchen lasse? das werde ich nicht erst den Astronomen vorsagen müßen. Sie haben ungleich zusammengesetztere und unzuverläßigere Sectoren gebraucht. Die Sterne, die nahe beym Zenith vorbeygehen, werden gewöhnlich mit eigentlich dazu bestimmten Sectoren beobachtet. Und bey solchen hat man auch schon anstatt der Zirkelbogen, deren Eintheilung so mißlich ist, Tangenten und Chorden gebraucht. Da aber, besonders wenn z. E. die Entfernung eines Cometen von Sternen, oder eines Sterns von dem Monde sollte gemessen werden, zween Beobachter seyn müssen; so läßt sich für solche Fälle vermittelst eines Planspiegels der Tubus mbM so abändern, daß das Augenglas seitwerts zu stehen komme, und auf diese Art ein Beobachter den andern im geringsten nicht hindere. Das Instrument kommt sodann auf eine paralactische Maschine, so daß wenn die beyden Sterne einmal gesehen werden, die Beobachtung durch das bloße Umdrehen der Maschine fortgesetzt, die Distanz genau berichtigt, und

wenn

wenn sie sich, wie es bey dem Monde und zuweilen bey Cometen geschicht, in kurzer Zeit merklich ändert, mehrere Distanzen können genommen werden. Noch muß ich anmerken, daß Hr. Brander in jedem Tubo metallene sehr feine Fäden angebracht hat, und zwar in dem Tubo naN dergestalt, daß der Faden hart an dem Glase des Micrometers wegstreicht. Beyde Fäden sind in der Axe des Objectivglases, und letzterer dient besonders auch dazu, daß wenn auch das Object über oder unter die Scala des Micrometers fällt, der Faden dennoch dessen Lage einzeige. Bey geometrischen Operationen, wo das Instrument Horizontal liegt, hat dieses seinen guten Nutzen, weil eben nicht immer jede Objecte in einer geometrischen Ebne liegen.

§. 24. Ungeachtet nun ein solcher Sector für einen Winkel, der nicht viel über 30 Gr. ist, seine beträchtliche Vorzüge hat, so blieb mir doch noch die Frage, ob die Sache nicht auf die völlige 90, 180, 360 Grade getrieben werden könnte. Auf 60 Gr. läßt sie sich allerdings treiben, weil eben so wie der Tubus naN herunterwärts geht, ein anderer von b aufwärts gehen kann. Alsdann läßt man in Cb schlechthin nur die Regel, und zu dem Micrometer ba kömmt noch ein anderes, welches eben so durch den obern Tubus geht, wie cb durch den untern, und jedes für sich besonders gedreht werden kann. Ueber die 60 Grade wird sichs aber bey dieser Art der Einrichtung nicht wohl gehen lassen. Indessen erhält man dadurch wenigstens einen völligen Sextanten.

§. 25. Um aber dennoch auch auf Quadranten, halbe und ganze Circul bedacht zu seyn, wo der Gebrauch von bloßen Chorden nicht mehr füglich angeht, und die Glasscalen schwerlich und nur mit Gefahr eines öftern Mißlingens im Zirkel herum gebogen werden können, so dachte ich auf Mittel, daß wenn ein Limbus aus einer flachen Spiegeltafel ausgeschnitten wird, nachdem

er in seine Grade und Minuten eingetheilt ist, dieser Limbus durch das Fernrohr durch, oder besser zu sagen, über demselben so weggehen könne, daß die Eintheilung statt eines Micrometers diene, auf welchem das Bild des Objects unmittelbar gesehen werden könne. Dieses war nun vermittelst eines vor dem Brennpunct des Objectivglases unter 45 Gr. geneigten Planspiegels allerdings möglich. Denn es sey O das Objectivglas, (Fig. 5.) AOB die Axe desselben, der Spiegel in B unter 45 Graden geneigt, so fällt das Bild, welches in b würde gewesen seyn, aufwärts in CD; und CD ist das Profil von dem gläsern Limbus, dessen Centrum in A seyn kann. In E ist das Augenglas in seiner behörigen Entfernung, so daß man durch dasselbe das Bild auf CD deutlich sehe.

§. 26. Was hiebey die Bewerkstelligung einschränkt, ist, daß die Spiegeltafeln eben nicht von jeder beliebigen Größe zu haben sind, und damit fallen die ganzen Zirkel überhaupt kleiner aus als halbe (weil auch die größten Spiegeltafeln viel länger, als breit sind) und die halben Zirkel kleiner als Quadranten, Sextanten ꝛc. Dieses versteht sich für sich. Der andere Umstand betrift die Eintheilung in Grade, Minuten ꝛc. Diese läßt sich zwar auf Glas feiner und bey gleicher Feinheit viel sichtbarer und dauerhafter, als auf Meßing machen, indessen ist die äußerste Genauigkeit immer noch so schwer zu erhalten, daß sie einer Berichtigungstafel bedarf. Da indessen Herr Brander seinen Scalen eine so große Genauigkeit geben kann, so scheint mir die Schwierigkeit fürnehmlich auf die Bestimmung der wahren Länge des Halbmessers anzukommen, weil man doch die Chorden in den Tabellen so scharf hat, als sie in der Ausübung niemals erlangt werden können. Das Uebrige wird wohl auf angestellte Versuche ankommen, wie weit es hierinn gebracht werden kann.

So viel demnach für diesesmal.

Georg


B

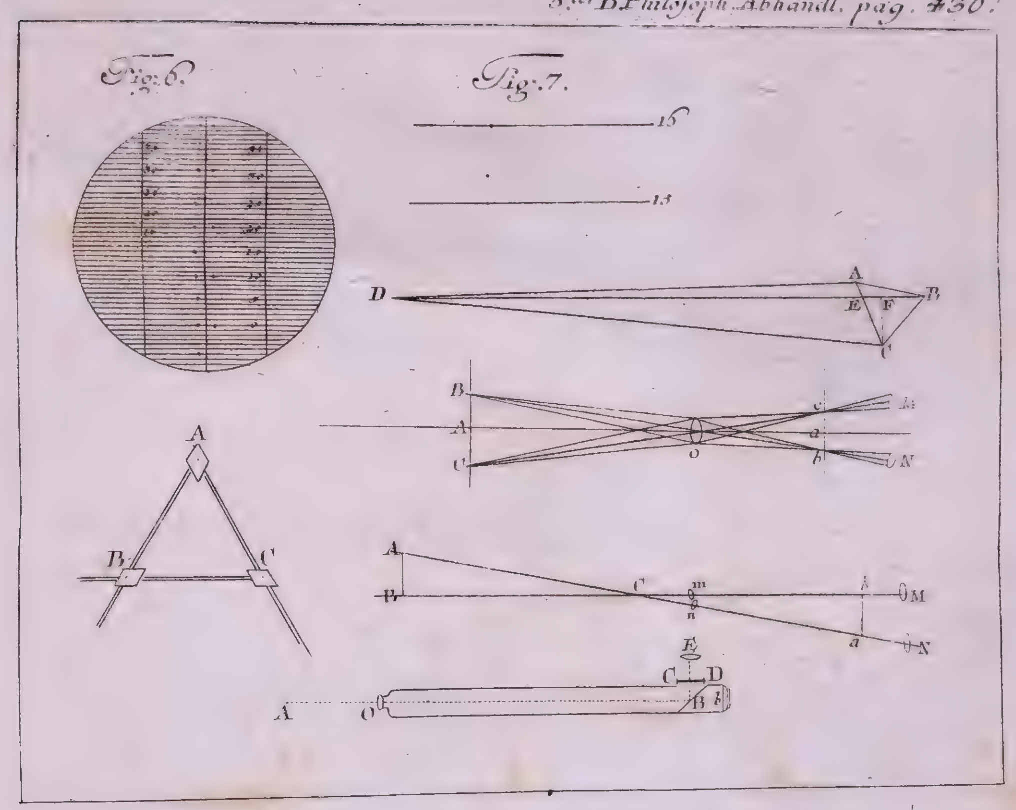


Fig. 6.
Fig. 7.
16
15
D
A
B
E
F
C
B
A
C
o
c
a
b
M
N
A
B
C
m
n
M
a
N
E
C
D
A
O
B
b

Georg Friedrich Branders
Beschreibung
eines
neuerfundenen
dioptrischen Sectors,
und seiner
wesentlichen Einrichtung und Theile,
nebst
einer kurzen Belehrung
von dessen Gebrauche.



§ 1.

Indem ich von diesem Instrumente eine Anzeige geben will, welches, wie ich hoffe, den Beyfall aller Mathematickverständigen verdienen wird, werde ich, um alle Wiederholungen zu vermeiden, weder eine theoretische Beschreibung desselben vorzunehmen, noch auch von dem mannigfaltigen Gebrauch, Nutzen und Vortheilen, welche man von demselben sowohl in der Geometrie als in der Astronomie auf die vorzüglichste Art zu hoffen und zu erwarten hat, eine weitläufige Nachricht zu geben haben: da solches der berühmte und gelehrte Hr. Profeßor Lambert in Berlin in seinen hierüber gemachten Anmerkungen bereits zur Genüge gethan hat, und einsichtsvolle Leser dadurch genugsam belehret worden sind. Daher werde ich mich hier blos auf die Beschaffenheit seiner Theile einschränken und sie sowohl einzeln nach einander, als auch in ihrer Zusammensetzung beschreiben und zeigen, wie man sich überhaupt dieses Instrumentes zum Gebrauche bedienen müßte.

§ 2.

§ 2. Tab. II. Fig. 1 zeiget nun, wie dieses Instrument in seiner Zusammensetzung aussieht und völlig zum Gebrauch gerichtet ist. Fig. 2 ist die Anrichtung zu sehen, welche unterhalb in der Mitte des Sektors angeschraubet wird, und dazu bestimmt ist, daß man demselben damit eine sanfte horizontale oder verticale Bewegung verschaffen kann, wenn man sich desselben auf einem Stativ (Fig. 3) horizontal bedienen will.

§ 3. Um in der Beschreibung dieses Instrumentes ordentlich zu verfahren, muß ich sogleich erinnern, daß dasselbe eigentlich aus drey Haupttheilen bestehe: **Erstens** aus der Rahm oder dem Gestelle ABC. **Zweytens** aus dem Tubus FG und **drittens** aus der Scala HI.

§. 4. Was nun erstlich das Gestelle ABC betrift, so ist solches von Holz, und hat die Figur eines gleichschenklichten Triangels. Bey C ist ein wirbelartiges Centrum von Meßing angeschraubet, an welchem der Tubus beweglich ist. Der Winkel ACB aber richtet sich nach der Länge der Scala IH, und kann dahero 15, 20, 25 bis 30 Grade ꝛc. groß seyn. Vornen, wo die beyden Schenkel A B sich endigen, ist noch eine hohle Rahm D E dergestalt daran verbunden, daß der Tubus G F dadurch gehen und sich in derselben ganz frey von E nach D bewegen kann: der Stand derselben ist curvatisch rund, und das Centrum ist bey C.

§. 5. Das zweyte Hauptstück dieses Sektors ist der Tubus GF. Dieser ist vornen bey C an das besonders angerichtete meßingene Centrum dergestalt angemacht worden, daß er sich nicht allein um dasselbe sanft und ohne Spielraum drehen läßt, son-

sondern daß man auch noch hieran den Mittelpunkt zur Prüfung und Bestimmung des Radius wahrnehmen kann, wovon nachgehends noch das mehrere solle gesagt werden. Das Objectivglas an diesem Tubus ist vermittelst meßingener Federn in die Höhlung des Tubus bey G eingeschoben, und kann durch das äußere Linial gf, welches man vermittelst des aufrecht stehenden Stifts f beweget, näher oder weiter vor der Scala gebracht werden. Denn bey dieser Art eines Tubus darf das Ocularglas nicht, wie bey der gemeinen Art von Sehröhren, beweglich und hingegen das Objectiv fest seyn, ausgenommen jenes nur so viel, daß man dadurch in den Stand gesetzet wird, die Scala deutlich und klar zu erblicken. Dagegen aber muß das Objectiv hier beweglich seyn, weil solches sein Bild sehr genau auf die Scala, die immer einen gleichen Abstand von dem Centrum C hält, werfen muß, woferne nicht eine Parallaxis hiebey entstehen solle.

§ 6. An dem andern Ende des Tubus ist das hohle Stück K eingesteckt, wodurch die lange Scala IH geschoben wird. Damit aber die Scala immer an die Axe des Tubus anliegen möge, so steckt inwendig noch ein anderes Rohr, über welches ein sehr zarter Silberfaden gespannet ist, der durch das Centrum desselben geht, und parallel an der Fläche der Glastafel wegstreifet. Dieser Silberfaden geht also senkrechts durch die Mitte des ganzen Campus, und folglich bemerket er auch die Theile auf der Scala, welche das Bild, das ebenfalls an derselben stehet, darauf bezeichnet und abmahlet, es mag dasselbe gleich über oder unter der Scala zu stehen kommen. Zugleich ist dieser Faden auch das Maß des Radius vom Centrum, welcher 5000 Scrupel oder solche Theile, aus welchen die Scala bestehet, enthält.

 § 7.

§ 7. An eben diesem Stücke K ist von außen noch ein kurzes Stück Rohr befestiget, in welches noch ein anders eingeschoben ist, welches das Ocularglas enthält, und etwas weniges aus und ein gezogen werden kann, je nachdem es das Gesicht und Auge erfordert, um die Theilung auf der Scala deutlich und klar bemerken zu können.

§ 8. Unter dem Schenkel BC des Gestelles ACB ist noch ein anderer Tubus, und zwar von eben dieser Art und Größe parallel unter den erstern angeschraubt; nur wird dieser Unterschied dabey bemerket, daß dieser untere sein besonderes Mikrometer oder eine Glasscala und zwar in eben diesen Theilen des obern und parallel mit denselbigen in dem Foco des Ocularglases stehen hat. Dieser Tubus bleibet an dem Gestelle beständig feste und unbeweglich, und ist so gesetzet, daß seine Axe mit der Axe des obern parallel ist.

§ 9. Die Scala HI, macht das dritte Hauptstück dieses Instrumentes aus. Diese besteht aus einem Parallelogrammum von feinpolirten und paralleldickem Spiegelglas, worauf der Länge nach ein sehr feiner Maßstab in Scrupeln nach französischem Maß, den Zoll zu 120 Theilen gerechnet, mit einem Diamanten sehr subtil verzeichnet ist. Weil aber in dem Zählen dieser Theile gar leicht wegen ihrer Subtilität ein Irrthum begangen werden könnte, so unterscheiden sich die Fünfer und Zehner durch etwas längere Striche, die Fünfziger aber durch so lange Striche, die die ganze Breite des Glases durchlaufen, wobey noch überdas die Zahlen 50, 100, 150, und so weiter bis zu Ende hingezeichnet

net worden, so daß allezeit zwey Aufschriften in dem Campus gesehen und gezählet werden können. Dieses Glasparallelogrammum ist in einen hölzern Rahmen eingefasset, an dessen einen Ende seine Charniere angeschraubt ist, deren Centrum durch das Zero der Theilung gehet, der andere Theil derselben aber an dem Rahmen des Gestelles bey E angeschraubt ist, so daß wenn der Mittelfaden des beweglichen Tubus das Zero oder den Anfang der Scala schneidet, jener mit diesem einen rechten Winkel machen muß.

§ 10. Auf der andern Seite dieses Rahmens bey A ist unterhalb desselben eine gekrümmte Stütze oder Arm L angeschraubt, auf welcher dieser Rahm mit seiner Scala, in welchem Stand solche nur immer seyn mag, allezeit ruhet; damit seine Charniere nicht die ganze Schwere desselben allein tragen müße, und sich also nichts verziehen könne, wiewohl dieser Arm auch nach Belieben abgenommen werden kan. An dem Ende dieses Arms ist auch noch ein aufrechter Stift h zu sehen; an welchem der Rahm anstehen muß, wenn er einen rechten Winkel mit dem Tubus macht, und durch welchen diesem leztern gleichsam seine Gränze gesetzet wird, die er nicht überschreiten darf, wenn derselbe auf dem Zero der Theilung stehet.

§. 11. Damit aber der Tubus ohne große Bemühung gelenket und ihm eine sanfte Bewegung gegeben werden könne, so ist über denselben und über den hölzernen Limbus DE ein gekröpfter Hacken M mit einer Rolle angeschraubt worden, über welche eine Saite geschlungen ist, die über die Curvam DE gespannt ist,

 und

und woran die Rolle alsdann lauft und den Tubum mit sich nimmt und beweget.

§. 12. Damit man aber auch dem ganzen Sector eine solche sanfte Bewegung geben könne, so zeiget sich Fig. 2 eine zu diesem Ende veranstaltete besondere Anrichtung. Diese bestehet aus zwey doppelt übereinander geblatteten Scheiben mit einam Nagel, der in der Mitte senkrecht durchgehet, und einem Schrauben, der quer durch die zwey Arme dieser Anrichtung reichet. Diese kann nun auf das Stativ einer jeden Art von Meßtischen gesetzt werden, wo sodann der Sector selbst darauf angeschraubt wird. Die drey Schrauben a a a in dem Stativ (Fig. 3) gegen der erst gemeldeten Scheibe (Fig. 2) geben dem Sector die Lage nach dem Object, der Horizontalschraube BC aber verschaffet demselben die Centralbewegung. Damit aber diese angezeigte Schrauben aaa keine Vertiefungen in diese Anrichtung hineindrücken können, so werden runde Platten von Meßing dazwischen an die Schrauben gesteckt.

§. 13. Das ganze Instrument, oder der Sector selbst ist übrigens von Holz, aber von einem solchen, welches besonders hiezu ausgesucht ist. Man hat sich zu dem Holze aus besondern und guten Vorbedacht entschlossen, weil das, worauf hier das meiste, ja alles ankommt, bey dem Holze, und mit demselben weit sicherer und besser zu erhalten ist, als mit den Metallen. Denn alle Richtigkeit und Sicherheit dieses Instrumentes hängt blos und allein von der beständig und unveränderlich richtigen Länge des Radius und der Scala ab. Ob nun gleich die Wärme und

Kälte

Kälte, die Feuchtigkeit und Trockenheit der Luft mehr oder weniger auf das Holz einen Einfluß hat und wirket, so betrift die Veränderung, die dadurch entstehet, doch nur die Dicke und Breite, in Ansehung der Länge aber ist solche sehr wenig oder gar nicht beträchtlich, zugleich aber ist auch dadurch mehrere Bequemlichkeit verschaffet worden, indem das Instrument jetzt ganz leicht ist, und ohne große Mühe von einem Orte zu dem andern gebracht werden kann.

§. 14. Nach dieser Beschreibung des Sectors muß ich nun auch zeigen, wie man damit umgehen und denselben gebrauchen solle. Ich habe hier den Radium in 5000 Theilen des Micrometers angenommen, welches zu mehrerer Bequemlichkeit dienet; denn man erhält dadurch den Vortheil, daß man die gefundene Zahl der Theile der Scala nur sogleich in den Sinustabellen aufsuchen, und den daneben stehenden Winkel verdoppeln darf. Denn weil der Sinus eines jeden Winkels die halbe Chorde des gedoppelten Winkels ist, wenn der Radius 10000. heißet: so ist er hiedurch schon halbiert. Bey diesem könnte es nun sein Bewenden haben, und möchte in diesem Falle gut seyn, wenn man sich blos mit einzeln Minuten begnügte, oder wenn die Zahl gerade mit der Zahl des Sinus einträfe. Wenn aber die Zahl zwischen zwey Minuten einschlägt, so ist es alsdann nöthig den partem proportionalem für die ihm noch zugehörigen Secunden der nächst daran stehenden kleinern Zahl zu ersetzen. Wenn man also z. E. auf der Scala 2137. 0 gefunden hätte, so findet sich in den Sinustabellen bey 12°. 20′ = 2135. 9

bey 12°. 21 = 2138. 8

folglich ist die erstere Zahl zu klein und die letztere zu groß. Die Differenz zwischen beyden ist 0002. 9, und die Differenz zwischen der gefundenen 2137. 0 und dem Sinus von 12° 20′ = 2135. 9 ist 0001. 1. Also, wie sich die Differenz von dem nächst größern und nächst kleinern Sinus oder 2. 9 zu der Differenz von dem nächst kleinern Sinus und dem gefundenen, das ist 1. 1 verhält: so verhält sich auch eine Minute oder 60 Secund. zu dem Ueberschuß 1. 1, welches noch zu 12° 20′ hinzugethan werden muß. Da nun

$$2.9 : 1.1 = 60 : 22\tfrac{2}{2\,9}$$

oder ungefähr 23 Secunden beträgt: so ist 2137. 0 der Sinus von 12°. 20′. 23″. Wird nun dieser noch verdoppelt, so erhalte ich 24°. 40′. 46″ und zugleich die Chorde des gesuchten Winkels, welche dieser Anzahl von Theilen gleich kommt, und damit übereinstimmet.

§. 15. Damit man aber noch kürzer zu Werke gehen, und alles zum Gebrauch bequemer eingerichtet seyn möchte, so habe ich sogleich die Chordentabelle hiezu auf den Radius von 5000 bis auf 30 Grade hinauf, und zwar von 10 zu 10 Secunden berechnet, und für diejenige, so dieses Instrument verlangen, drucken lassen. Durch diese Tabelle ist nun alles sehr leicht und bequem gemacht worden: denn man darf nur gleich die gefundene Anzahl von Theilen der Scala in diesen Chordentafeln aufsuchen, so werden die oben und zur Seite stehende Zahlen die Grade, Minuten und Secunden anzeigen. Wenn ich also z. E. auf der Scala 1302. 6 zählte, so wird diese Zahl 14° 58′ und 10″ anzeigen. Denn die letzte Zahl in diesen Tafeln bedeutet allezeit die Zehendtheile von den Theilen der Scala, und muß also nothwendig geschätzet werden

den. So stehet z. E. bey 4° 30′ die Zahl 392. 6, das ist $292\frac{6}{10}$ bey 4°. 30′. 10″ findet man die Zahl 292. 8, das heißt $292\frac{8}{10}$ oder $\frac{4}{5}$ u. s. w.

§. 16. Weil die Intervalla dieser Scala, welche von Scrupeln zu Scrupeln, oder $\frac{1}{120}$ eines französischen Zolles fortlaufen, noch viermal durch das Ocularglas vergrößert werden; so ist es noch gar wohl möglich, daß ein dazu gewöhntes Auge diese Decimaltheile ziemlich genau durch das Schätzen bestimmen könne.

§. 17. Will man sich aber zu einer von diesen Scalen, einer nur halb so langen Regel oder Gestelles bedienen, dessen Radius nämlich nur 2500 oder 20 Zoll und 10 Linien hält; so kann man einen Winkel von doppelt so vielen Graden damit messen, und es entsteht daraus alsdann ein Sextant, wenn die Scala auch 2500 faßt. Auch in diesem Falle kann man die obengemeldte Chordentabellen nicht weniger gebrauchen, so weit sie nämlich zureichen, weil sie nur 30 Grade fassen. Was aber darüber hinausgeht, muß man aus den Sinus Tafeln, so wie solches §. 14 gezeigt worden, zu erhalten suchen: nur muß man die gefundene Anzahl der Theile vorher duplieren, und sodann solches Product in den Tabellen aufsuchen. Indessen lassen sich mit einem solchen Sector, der nur 20 Grade mißt, Winkel von 60 und noch mehr Graden durch Zwischenzeichen auf eben so sichere und richtige Art bestimmen, als wenn derselbe eben diese Anzahl von Graden selbst faßte: denn die Richtigkeit dieses Instruments er-

setzet

setzet alles, was ihm etwa auf der andern Seite abgehen möchte, auf eine recht befriedigende und vergnügende Weise.

§. 18. Ehe man aber mit diesem Sector zu operiren anfangen will, müssen zuvorderst die Ocularen an beyden Tubis nach dem Auge desjenigen, der damit observiren will, richtig gestellet werden: das ist, es muß das Ocular des obern beweglichen Tubus dergestalt gesetzet seyn, daß man die Theilung der Scala klar und deutlich dadurch sehen könne. Wenn dabey ein gleiches Verhalten mit dem Objectivgla beobachtet, und dasselbe so gestellet wird, daß dessen Bild sich auf der Scala deutlich genug abmalet, und also Bild und Scala deutlich gesehen wird, so kann auch keine Parallaxis sich äußern. Eben dieses muß auch in Ansehung des unteren Tubus, welcher feste stehet, beobachtet werden; an diesem aber muß das ganze Ocularrohr herausgezogen werden, wenn man den Mikrometer, oder die Scala desselben, die innerhalb diesem Rohre stehet, näher oder weiter von dem Ocular bringnn will.

§. 19. Nicht weniger muß man auch untersuchen, ob der Faden in dem Focus, der nicht nur den Radius bestimmet, sondern auch die Theilung auf der Scala bemerket, senkrecht, und mit demselben parallel stehe. Dieses läßt sich auf folgende Weise gar leicht erfahren, wenn man diesen Faden an einen langen Strich der Scala z. E. bey 50, 100 rc. hinführet, und zusieht, ob er mit jenem parallel stehe. Fehlt es einigermassen hieran, so befindet sich zu der Seite des Tubi eine Oeffnung, wo man ihn

ihn vermittelst eines Stifts in Ordnung bringen, und gehörig richten kann.

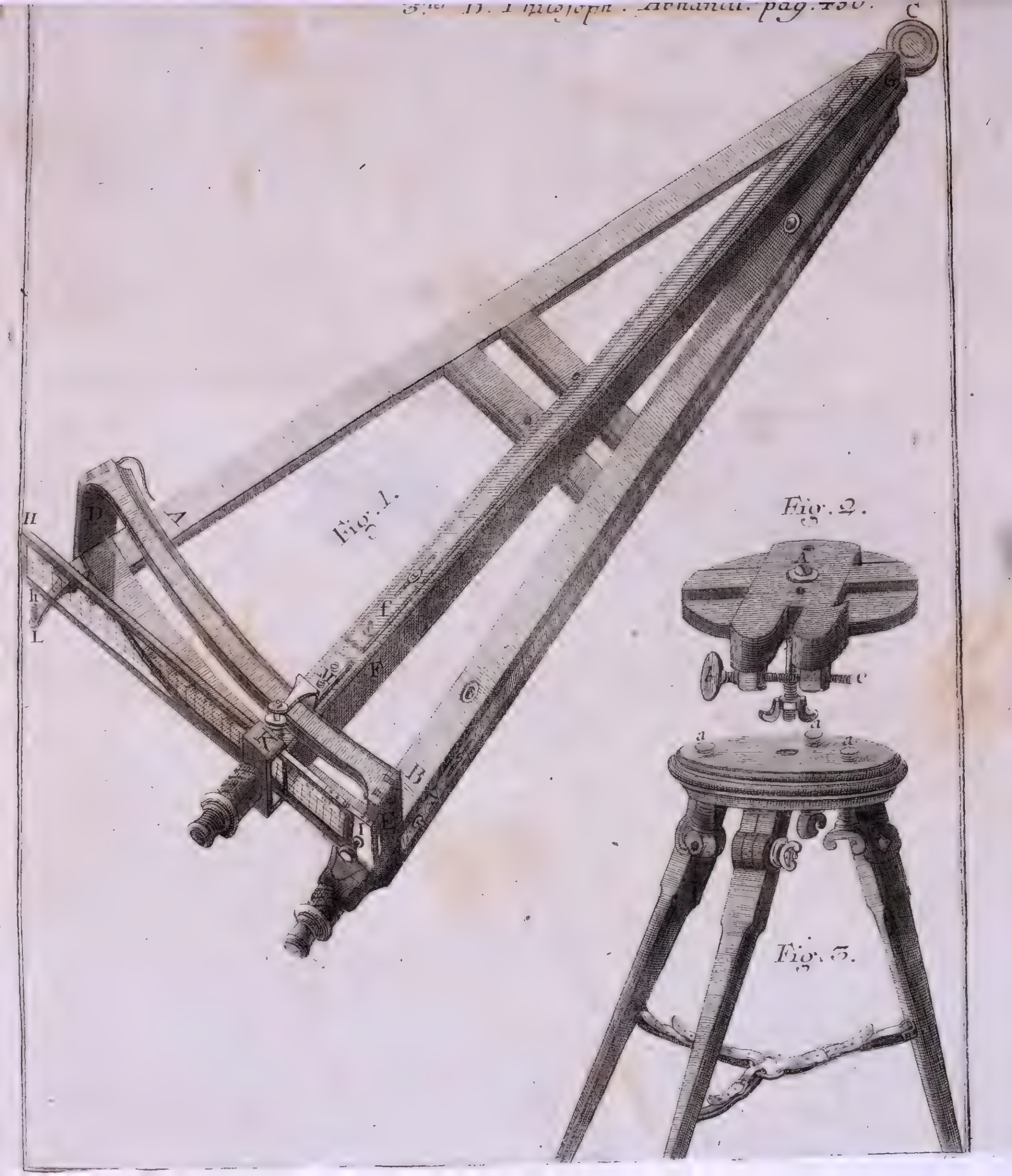
§. 20. Dieser untere unbewegliche Tubus N, dienet bey geometrischen horizontalen Messungen dazu, das Ziel zu halten, wenn man indessen mit dem obern Tubus nach dem anderen Ziel geht, damit inzwischen nichts verruckt oder verschoben werde. Daher muß man auch nothwendig wissen, wie jener mit diesem zutrift. Dieses zu erfahren, führet man den oberen Tubus auf das Zero der Scala, und sieht nach einem ziemlich entfernten Objecte, so daß dessen Bild auch in das Zero zu stehen kommt, und von dem Faden bemerket wird. In diesem unverrückten Stand beobachtet man hierauf, wohin eben dieses Bild auf der untern Scala in dem unbeweglichen Tubus N hintrift; geschieht es, daß es ebenfalls auf die Mittellinie zutrift, so ist derseble mit dem obern vollkommen parallel: füget es sich aber, daß es auf der rechten oder linken Seite der Scala abweicht, so darf man nur diesen Abstand merken, und sich sodann bey den fernerweitigen Operationen darnach richten, denn diese Scala laufft in eben den Theilen, und vollkommen mit dem obern parallel fort. Was ich hier von horizontalen Winkelmessungen gesagt habe, das findt eben sowohl auch bey den verticalen statt. Man sieht also hieraus ganz leicht, daß dieser Sector eines der einfachesten und allerrichtigsten Instrumente ist, deren man sich bedienen kann, Winkel damit zu messen, indem man dabey schon das Maaß des Winkels vor Augen hat, ohne es erst aus den mancherley Theilungsarten des Limbus schätzen und folgern zu dörfen.

§. 21. Ich habe bishero gezeiget, wie man sich dieses Instrumentes zu geometrischen Messungen bedienen solle: nun sollte ich noch melden, was dieser Sector in der Astronomie, besonders wenn er auf parallactische Maschinen angerichtet wird, vorzügliches leisten könne: da aber der berühmte und gelehrte Herr Professor Lambert solches schon in seinen Anmerkungen zum Theil gezeiget hat, so bleibt mir nichts übrig, als noch zu melden, daß Liebhaber mit dergleichen Sectors mit und ohne Stativ, so richtig als es nur möglich ist, von mir bedienet werden können, übrigens aber meine Bemühungen ihrer Gewogenheit und Liebe zu empfehlen.



Georg




C
Fig. 1.
A
D
H
h
L
f
F
K
B
E
I
Fig. 2.
A
b
c
a
a
a
Fig. 3.

Georg Friedrich Branders
Beschreibung
einer
ganz neu verfertigten
Libelle
oder
Nivellierwage,
welche ohne Senkbley ist, und nicht nöthig hat
aufgehängt zu werden, auch viele Vorzüge
vor den bisher gewöhnlichen hat.



§ 1.

Es ist denjenigen, welche sich der bisher gewöhnlichen Wasserwagen bedienet haben, aus der Erfahrung zur Genüge bekannt geworden, daß diese Instrumente noch sehr viel mangelhaftes an sich haben, so daß man damit nicht sicher genug, oder wenigstens nicht allzubequem hat operiren können. Ich habedaher allem dem, was man daran noch verbessert zu sehen wünschte, durch diese nün zu beschreibende Libelle abzuhelfen und sie so herzustellen gesucht, daß ich mir schmeicheln darf, den Beyfall der Kenner damit zu erhalten. Denn sie unterscheidet sich von allen übrigen Arten, die mir bisher bekannt worden sind, zuvörderst darinnen, daß sie auf eine sehr bequeme leichte und einfache Art in einem Zimmer berichtiget und bey jeder Witterung, sie mag beschaffen seyn, wie sie immer will, sicher damit operiert werden kann: wo hingegen die bisher gewöhnlichen Wasserwagen bey der geringsten

unstäten Witterung oder Bewegung der Luft ohne Nutzen sind, und nicht gebraucht werden können, weil man sie niemal zum stillstehen oder zur Ruhe bringen kann, wie viele Anstalten man auch dagegen vorkehre.

§ 2. Es ist kein geringer Vorzug dieses Instrumentes, daß es nicht nur den Niveau sicher und richtig bestimmet, sondern auch sogleich die überzeugende Probe der damit vorgenommenen Operationen an die Hand giebt. Hierzu kommt noch die Bequemlichkeit bey dem Gebrauche desselben, da dasselbe kein besonderes Stativ, oder Fußgestelle nöthig hat, sondern überall hin auf einen Tisch oder auf jeden Feldmeßtisch kann gesetzet werden.

§ 3. Endlich können auch damit vermittelst des in Tubo dioptrico angebrachten Glasmicrometers alle in Campo über und unter der Wasserlinie erscheinende Gegenstände in der ersten Minute bestimmet, durch den äußern Schrauben aber vermittelst seiner Zifferscheibe und Index bis von 3 zu 3 Secunden erhalten werden. Dieses scheinen mir in der That Vortheile zu seyn, die wichtig genug sind, diesem Instrumente den Vorzug vor den bisher gewöhnlichen beyzulegen.

§ 4. Ich will aber nun ohne längere Ausschweifung zu der nähern Beschreibung dieses Instrumentes selbst fortgehen, welches, so wie es zum Gebrauch stehen muß, Tab. III. vorgestellet ist. Man kann bey demselben eigentlich vier Stücke wahrnehmen, woraus es zusammengesetzet ist. Das erste ist der dioptrische Tubus A. Das zweyte die Glasröhre, die mit Spiritus gefüllt ist B. Das dritte die bewegliche Regel EF mit den beyden Supports CC oder dem Lager des Tubus A. Das

vier-

vierte endlich ist das Fußbret D, von welchen Stücken, oder Theilen allen ich nun eine genaue Beschreibung ertheilen will.

§ 5. Was nun also erstlich den dioptrischen Tubus A betrift, so ist solcher ein hohler, gleichweit gebohrter Cylinder, der über seine innere Höhlung dergestalt abgedreht worden, daß theils seine äußere Oberfläche mit jener parallel ist, theils aber und ins besondere, daß die auf beyden Seiten befindliche Anhöhen aa, wo sie in den Supports aufliegen und dieselben berühren, nicht nur vollkommen rund, sondern auch von der möglichsten gleichen Dicke sind, weil auf dieser genauen Richtigkeit alle Sicherheit des Instrumentes beruhet.

§ 6. An dem einen Ende dieses Tubus A, ist eine Kapsul, welche das Objectivglas enthält, eingesteckt. Diese kann nach Erfordern der Umstände, und wie man will, vermittelst der vier dabey angebrachten Stellschrauben hin und her geschoben werden, wovon ich hernach weiter unten das mehrere sagen werde. An dem andern Ende dieser Röhre ist noch ein anderes Rohr mit dem Ocularglas und Glasmikrometer eingeschoben welches leztere noch eine besondere und eigene Röhre hat, die in jene eingesteckt ist. Auf diesen beyden, sowohl auf der inneren Micrometer als auf der äußern Ocularröhre ist an ihrer äußern Oberfläche ein Maßstab in den Theilen des Micrometers gezeichnet, damit man hiedurch nicht nur den wahren Radius von den weiten sowohl als von den nahen Distanzen oder Abständen erhalten, sondern auch das Micrometer selbst ohne große Schwierigkeit für das Ocularglas so setzen könne, wie es ein Mjops oder Presbyta nöthig hat, wenn er anders deutlich sehen solle. Wenn man daher diesen erforderlichen Abstand des Micrometers

vom

vom Ocular nur einmal für sein Aug gefunden hat, so bleibt solcher hernach auch beständig und unveränderlich für eben dieses Gesicht, und man darf solches nur wieder auf das bekannte Zeichen schieben. Was aber das Ocularrohr, in welchem die Micrometerröhre stecket, betrift, so ist solches in dem Tubus A selbst beweglich, und dieses muß sich nach der Deutlichkeit des Bildes, je nachdem es von einem weiten oder nahen Gegenstand herrühret, richten, wo die darauf angebrachte Scala sodann den Unterscheid desselben bemerket.

§ 7. Dieses Glasmicrometer ist bey Fig. 2. gezeichnet zu sehen, wiewohl solches hier merklich größer zu erblicken ist, als es in der That selbst aussieht, weil es wegen seiner von allen Kennern bewunderten Feinheit in seiner eigentlichen Größe in Kupfer nicht auszudrücken und vorzustellen ist.

§ 8. Es besteht dieses Micrometer also aus einer runden Glasplatte, auf welcher zwey parallele und ohngefehr $\frac{2}{3}$ einer französischen Linie von einander entfernte Meßleitern gezeichnet sind, so daß deren Intervalla rechts und links eine Distanz von 2 zu 2 Minuten bestimmen. Die eine davon lauft von 0 der Horizontallinie über und unter sich also fort, 0, 2, 4, 6, 8 ꝛc. Die andere aber, 0, 3, 5, 7, 9 ꝛc. Daher wird auch jeder Strich der zweyten zwischen der erstern eintrefen und durch diese Abtheilung eben so viel erhalten werden, als wenn man diese Scala in einzele Minuten eingetheilet hätte, die aber wegen der Enge und Feinheit dem Auge sehr mühsam würden zu schätzen gewesen seyn. Man darf also hier nur das Bild zu einer oder der andern Scala führen, so wird diese, welche zutrift, sodann den wahren Werth angeben. Stünde z. B. das Bild zwischen dem dritten

und

und vierten Intervallum, das ist zwischen 6 und 8 Minuten, so führe man solches zu dem andern, so wird es sich bald zeigen, ob es mehr oder weniger als 7 Minuten ist. Man siehet also hieraus, daß es eben dieses ist, was man sonst durch einzelne Minuten würde erhalten haben, ob es gleich auf diese angezeigte Art weit sicherer und leichter wird.

§. 9. Es ist noch ausser diesem eine Hauptabsicht dieser gläsernen Meßleitern, daß man hiedurch theils den Schraubenmikrometer E prüfen und rectificieren, theils aber damit, wenn der Tubus in der Wasserlinie liegt, den Horizont erforschen, oder bestimmen könne, wie viel die Objecte, die in dem Campus sichtbar sind, höher oder tiefer als derselbe liegen, ohne den Tubus aus seiner Lage zu bringen.

§. 10. Ueberhaupt aber kann man vermittelst eines solchen Glasmicrometers mit einer solchen Schärfe zu Werke gehen, welche sonst auf keinerley andere Weise zu erreichen möglich wäre. Dieses verursachet die ausserordentliche Feinheit dieser Scala: denn der Horizontalstrich, so wie auch alle übrige in der ganzen Theilung sind nicht dicker als der dreyßigste Theil eines Scrupels, dabey aber dennoch so scharf und sichtbar, daß sie sehr leicht zu unterscheiden sind. Hingegen aber ist der Unterschied bey den sonst gewöhnlichen sehr merklich in die Augen fallend, denn der allerzärteste Silberdraht, welchen man sonst hiezu genommen hat, würde $\frac{2}{5}$ eines solchen Scrupels, folglich 24 Secunden bedecken, nicht einmal zu gedenken, daß sie sich sehr gerne krümmen und schlapp werden, dagegen die Gläser immerdar in einem unveränderlichen Zustand verbleiben, und ihnen kein Zufall so leicht Schaden bringen kann.

§. 11. Der zweyte Haupttheil dieses Instruments ist die Röhre B, welche mit Spiritus oder Weingeist, und zwar so weit gefüllet ist, daß noch eine Luftblase darinn zurückgelassen worden, welche durch ihre Bewegung und Stillestehen den Niveau bestimmen muß. Diese hängt vermittelst einer Charniere an dem Tubus auf der einen Seite: an dem andern Ende desselben aber wird sie vermittelst einer Spiralfeder gegen eine Schraubenmutter gedruckt. und dieses deswegen, damit man ihr hiedurch den parallelen Stand mit dem Tubus A, oder vielmehr mit seiner Axe geben könne.

§. 12. Da aber die Luftsblase in dieser gläsernen Röhre nicht immer einerley Länge behält, sondern in der Wärme kürzer in der Kälte aber länger wird, wie solches nothwendig geschehen muß, und wovon die Ursachen aus der Naturlehre gar leicht beygebracht werden könnten, wenn wir nicht vermuthen müßten, daß solche einem Kenner derselben sogleich selbst einfallen werden: so habe ich auch deswegen die Länge der Luftblase bey der mittelmäßigen Temperatur der Luft mit zwey Seidenfadeu bemerket. Wird also die Luftblase bey wärmerer Witterung kürzer, so muß sie allezeit zwischen diesen zwey Faden zu stehen kommen, und zwar so, daß beyde Ende derselben gleich weit davon abstehen: wird sie aber bey kälterer Luft länger, so muß sie auf beyden Seiten gleich weit über dieselben hinausgehen.

§. 13. Die übrigen Theile dieses Instruments sind noch die bewegliche Regel mit den zweyen Supports und das Fußgestelle oder Bret D: Auf der Regel F C E selbst sind zwey vollkommen senkrechte Stücke oder Supports C C, die wie ein Y gestaltet sind, und in welche der Tubus A jederzeit zu liegen

kommt.

kommt. An dem einen Ende bey F ist diese Regel zwischen zween Backen beweglich, an dem andern Ende aber bey E kann ihr vermittelst eines feinen Schraubens eine Erhöhung von 6 bis 8 Graden ungefehr gegeben werden, Die Anrichtung für diesen Schrauben bestehet oben an der Regel bey E aus einer Zifferscheibe, welche an derselben, so wie die Mutter unten an dem Fußbret beweglich ist. Durch diese geht der Schraubenhals hindurch, und an demselben ist ein Zeiger angesteckt zu sehen, vermittelst dessen man die innern Theile einer Revolution auf der Zifferscheibe, die in 60 gleiche Theile vertheilt ist, bemerken kann. Zu diesem Ende ist auch der Radius dieser Regel F E auf das sorgfältigste bestimmet worden, so daß eine Revolution dieses Schraubens genau 6 Minuten mißt. Weil nun die Zifferscheibe in 60 Theile getheilt worden, so ist folglich $\frac{1}{60}$ so viel als 6 Secunden, und weil diese Theile noch ziemlich groß sind, so können durch das Schätzen noch kleinere Theile als 3 Secunden, wobey die Luftblase noch immer einen Ausschlag giebt, erhalten werden, welches in der That alles ist, was man beynahe zu erreichen wünschen kann.

§. 14. Dieses wird, wie ich hoffe, hinreichend seyn, um sich einen richtigen Begriff von der Beschaffenheit und Zusammensetzung dieser Wasserwage zu machen. Die Gründe, worauf dieselbe beruhet, hier anzuführen, würde theils zu weitläuftig werden, theils müssen sie einsichtsvollen Kennern der Mathematick wenig Mühe machen, solche einzusehen. Ich lasse also diese mit gutem Bedacht zurücke, und werde mich nur noch bemühen, zu zeigen, wie dieses Instrument zu dem Gebrauche selbst gehörig müsse rectificirt werden. Dazu sind nun zweyerley Arbeiten oder Richtungen und Stellungen desselben nöthig. Erstlich muß die

Axe des Objectivglases sehr genau in die Mitte des Tubus A zu stehen kommen, und mit seiner äusseren Rundung a a parallel gemacht werden; zweytens aber muß auch hernach die gläserne Röhre B mit jener parallel gesetzet werden.

§. 15. Um nun das erste zu bewerkstelligen, und diese Arbeit mit gehöriger Richtigkeit vorzunehmen, muß man mit dem dioptrischen Tubus A, so wie er auf seinen Supports liegt, ohne daß man jetzt noch nöthig hat, seine Aufmerksamkeit auf die gläserne Röhre B zu richten, nach einem entfernten Objecte z. E. einem Thurnknopf ꝛc. hinzielen, und zwar dergestalt, daß sein Bild durch die mittlere Horizontallinie des Micrometers durchgeschnitten wird, welches auch vermittelst des Schraubens C gar leicht kann erhalten und zuwege gebracht werden. Ist man damit zu Stande gekommen, so wendet man den Tubum A in seinen Supports das Untere über sich, so das die Glasröhre B oben über dem Tubus A zu liegen kommt, und sieht sogleich wieder nach dem vorigen Objecte. Findet es sich, daß das Bild an dem nämlichen Orte des Micrometers erscheint, wo es sich bey dem ersten Durchsehen gezeiget hat, so ist es gut, und hat seine völlige Richtigkeit. Ist es aber verändert, und das Object erscheint höher oder niedriger als vorher, so hilft man diesem ab durch das hin und herschrauben des Objectivglases, vermittelst der 4 zu diesem Ende angebrachten Stellschrauben, welches so lange unter beständigem und wiederholtem Umwenden des Tubus fortgesetzet wird, bis man endlich damit zu Stande gekommen, und das Object in beyden Fällen gleich eintrift. Die sicherste und gewisseste Probe hievon ist diese, wenn das Bild, man mag gleich den Tubus in seinen Supports rund um seine ganze äussere Peripherie drehen, wie man

will,

will, dennoch allezeit in dem Mittelpunkte des Micrometers erscheint, und niemals davon abweicht.

§. 16. Wenn diese Arbeit geschehen, so geht man zu der zweyten fort, und suchet der gläsernen Röhre B ihren parallelen Stand mit dem Tubus A zu geben. Bey dieser Beschäftigung hat man kein gewisses Object nöthig, sondern es kann solches im Zimmer auf jedem feststehenden Orte oder Tische vorgenommen werden, wie ich sogleich dieses beschreiben will.

Man schraubet nämlich anfangs die gläserne Röhre, so viel nach dem Augenmaße möglich ist, mit dem dioptrischen Tubus parallel, und leget ihn sodann wieder in seine Supports hinein. Hierauf schraubet man bey C die ganze Regel mit beyden Röhren so lange hoch oder niedrig, bis die Luftblase der Röhre in ihre Schranken zwischen den beyden Seidenfaden gebracht worden ist, und bemerket zugleich den Ort, wo der Index auf der Zifferscheibe stehet; oder noch besser, man bringt das Zero der Zifferscheibe an den Zeiger, oder auch den Zeiger auf jenes: sodann leget man den Tubus A in den Supports um, so daß, wo vorher das Objectivglas nach E gesehen, solches nun nach F zugerichtet ist. In dieser Lage wird nun die Luftblase nothwendig aus ihren erstern horizontalen Stand gewichen seyn. Man schraubet also wieder bey C vor- oder ruckwärts, bis solche wieder ihren vorigen Platz einnimmt, bemerket aber auch zugleich sorgfältig, wie viele Revolutionen erfordert worden, bis dieses erhalten worden ist. Mit der Helfte dieser gefunden en Revolutionen wird sodann wieder zurückgeschraubt, und dasjenige, was noch daran fehlet, mit der Schraubenmutter unter der Spiralfeder der gläsernen Röhre ersetzt, bis die Luftblase auf ihrem gehörigen und bestimmten Platze stehen

bleibt. Ich will solches durch ein Beyspiel deutlicher und begreiflicher machen. Gesetzt, ich hätte im ersten Falle 6 und $\frac{6}{60}$ Revolutionen bekommen, bis die Luftblase zurechte gestanden; so schraube ich $3\frac{3}{60}$ Revolutionen wieder zurücke, und ersetze diese Helfte durch vorhin gemeldete Schraubmutter der Glasröhre B, so werde ich meinen Endzweck gewiß erreichen. Nur ist noch nöthig, daß man bey dieser Richtung nicht gleich mit dem ersten Versuch zufrieden sey, sondern durch öfters Umwenden und Umlegen sich gehörig von der Richtigkeit desselben versichere, indem sich dabey noch öfters einige Differenzen zeigen, die aber immer kleiner gemacht, und auf die angezeigte Art verbessert werden müssen.

§. 18. Wenn dieses alles nun so weit in gehörige Richtigkeit gebracht worden ist, so kann man hierauf mit dem Operiren ganz sicher fortfahren; man muß auch nicht vergeßen, daß man sich, so oft man eine neue Operation vornehmen will, der parallelen Lage dieser Röhre durch das Umlegen derselben auf das neue versichere. Ferner soll vorher noch, ehe die erste Richtung mit Berichtigung der Axis oder Lineæ fiduciæ vorgenommen wird, die Scala des Micrometers nach dem Auge des Beobachters gehörig gestellet seyn; das ist, sie solle in der rechten Entfernung vom Augenglase, wo sie am deutlichsten gesehen wird, zugleich aber auch genau in dem Brennpunkte des Objectivglases stehen, so, daß Bild und Scala gleich deutlich gesehen werden, woferne keine Parallaxis entstehen solle, wiewohl solche gar leicht entdeckt würde, wenn mit dem Auge vor dem Diaphragma eine Bewegung hin und her gemacht, und eine Abweichung des Bildes vom Striche bemerkt wird. Noch merklicher aber wird es, daß das Bild und die Scala des Micrometers nicht zusammen passen, wenn man die vordern Capsul von dem Augenglase wegnimmt, und solches frey und

ganz

ganz offen läßt. Denn in diesem Falle wird sich das Bild bewegen, sobald man das Aug bewegt, und dieses wegen der Vergrösserung des Augenglases sowohl als dessen Campus nur desto merklicher.

§. 19. Der Beweis davon ist dieser: Es seye (Fig. 3 Tab. m) das Objectivglas, A das Augenglas, wenn nämlich die vordere Capsul abgenommen ist, M das Micrometer, das Bild, setze man, falle in I, folglich hinter das Micrometer M, so ist, wenn man auch das Object oder vielmehr das Bild deutlich sieht, A zu weit, und O zu nahe bey M. Ist nun das Aug in der Axe des Tubus, so trift der Punkt i auf m, und man sieht daher i deutlich, m aber undeutlich, Ist hingegen das Aug in o, so sehe ich zwar, wie vorhin i in i, aber nicht mehr auf dem Punkte m der Scala, sondern viel höher in n, und so ist also der Winkel A i o das Maß der Paralaxis. Dieser Winkel ist sodann desto größer, je größer A o und je kleiner A i ist. Der Effect aber, der eigentlich gesehen wird, ist die Distanz n m. Es ist aber

$$n\,m = \frac{i\,m.\,A\,o}{A\,i}$$

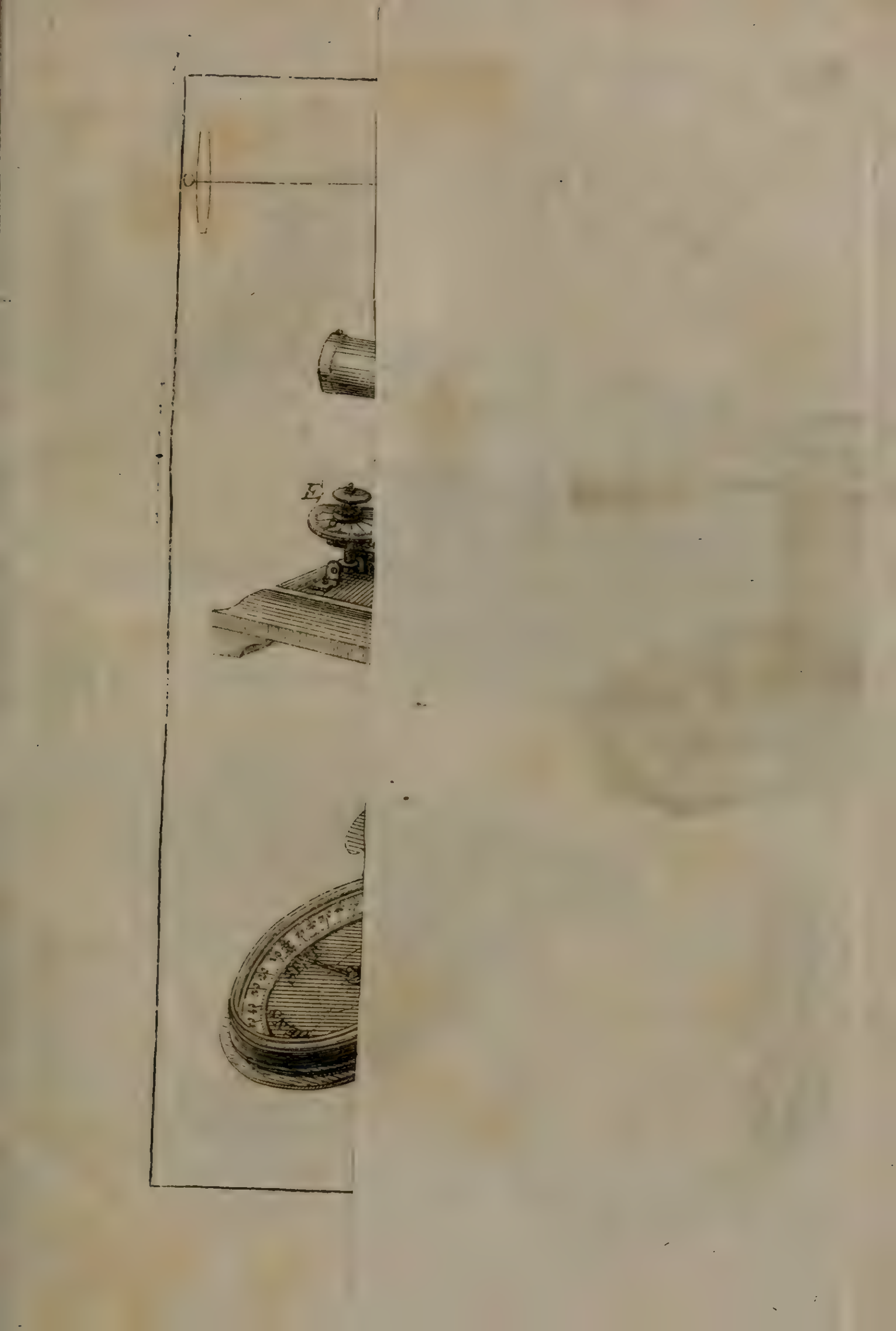
demnach wächst sie zugleich mit i m, i n. Und da das Augenglas merklich vergrößert, so wird n m auch bald sehr merklich groß, wenn i und m nicht genau zusammen treffen. Aus diesem jetzt gemeldeten Umstande, glaube ich, lassen sich viele Klagen erklären, welche man schon lange, und von Zeit zu Zeit überhaupt über die Micrometer geführet hat.

§. 20. Endlich muß ich noch gedenken, daß an das Fußbret D noch eine Schiene, oder ein meßingenes Lineal, und zwar pa-

parallel mit der Axe angeschraubt ist, damit man eine Boussole (Fig. 4) daran anschieben könne.

Nun möchte man zwar von mir noch fordern können, daß ich zeigen sollte, wie man mit diesem Instrumente umgehen, und dasselbe gebrauchen solle; allein, da solches in **Picarts Abhandlung von Wasserwägen**, wovon Herr Professor Lambert in Berlin eine neue mit wichtigen Beyträgen bereicherte Ausgabe besorget, und wo er auch dieser jetztbeschriebenen neuen Art von Wasserwagen ausdrücklich gedenken wird, schon zur Genüge und deutlich genug abgehandelt ist, so habe mich damit nicht weiter aufhalten wollen, sondern lasse es bey der bloßen Beschreibung dieses Instruments bewenden, und will begierige Leser auf jetztgemeldete Abhandlung verwiesen haben.





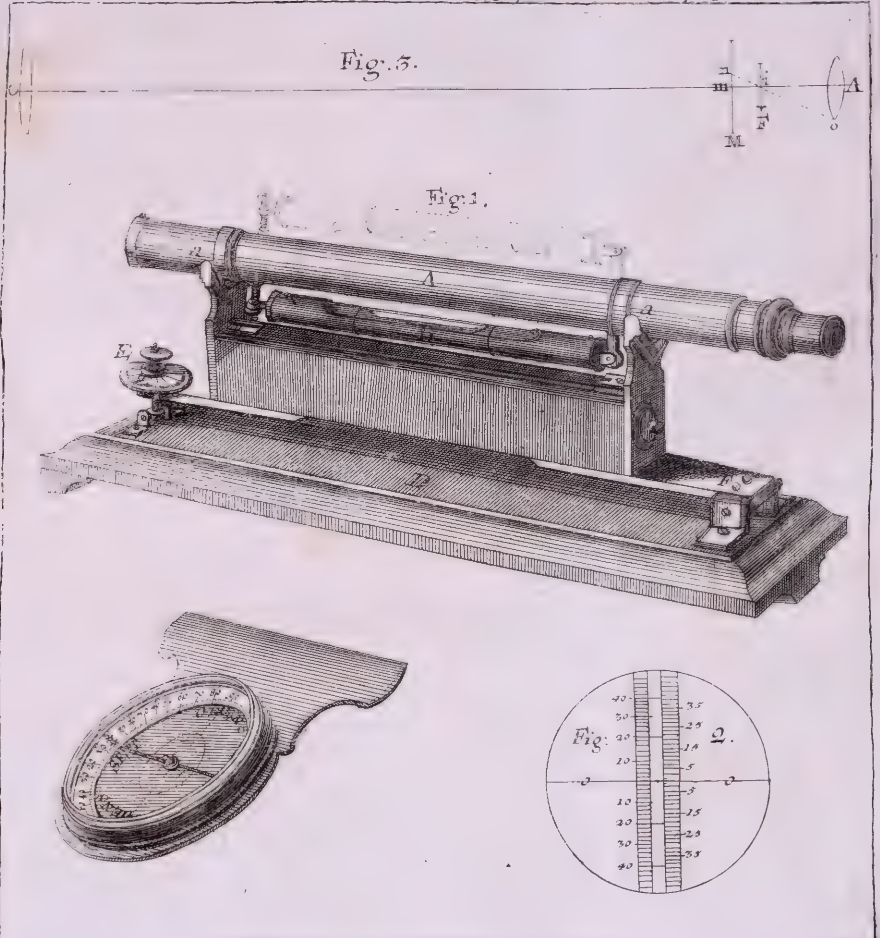


Fig. 3.
A
F
M
Fig. 1.
A
a
a
B
E
D
F
Fig: 2.
40
30
20
10
0
10
20
30
40
35
25
15
5
5
15
25
35



Register

der merkwürdigsten Sachen im fünften Bande der philosophischen Abhandlungen.

Wur=



Druckfehler.

Seite.	Zeile.	Steht.	Lies.
289.	2.	des	das
293.	4.	Tage weniger	Tage, weniger
Ebend.	16.	18′	48′
304.	22.	Stunden addiret	Stunden 49′ addiret
306.	15.	man woll;	man wollte
Ebend.	21.	1790.	1760.
317.	2.	Eipactenrechnungen	Epaktenrechnung
334.	27.	vor Rom	von Rom
345.	6.	44.	34.
356.	27.	39.	35.
357.	1.	39.	35.
397.	20.	Kalenders	Kalenders.
423.	3.	praceischen	peactischen
429.	23.	Anfang	im Anfang
Ebend.	24.	Erbfolges	Erfolges
432.	25.	geschwindiste	geschwindeste
435.	9.	einzeige	anzeige
448.	9.	Ocjectivgla	Objectivglas
464.	6.	Wasserwägen	Wasserwagen

